WOJEWÓDZKI KONKURS MATEMATYCZNY
DLA UCZNIÓW GIMNAZJUM W ROKU SZKOLNYM 2018/2019
ETAP REJONOWY

Schemat punktowania – zadania zamknięte
Za każdą poprawną odpowiedź uczeń otrzymuje 1 punkt.

Numer zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.
Poprawna odpowiedź	C	A	B	D	A	A	C	C	A	D	A	A	C	P F	C	C	B	P P	B	C	B	D

Przykładowe rozwiązanie i schemat punktowania – zadania otwarte
Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania nieuwzględnione w schemacie punktowania przyznajemy maksymalną liczbę punktów należnych za to zadanie.

Zadanie 23.
Przykładowe rozwiązanie
x – początkowa cena płaszcza
$0{,}9x$ – cena płaszcza po pierwszej obniżce
$0{,}9x - 0{,}05 \cdot 0{,}9x$ – cena po drugiej obniżce
$0{,}9x - 0{,}045x = 0{,}855x$

$$\frac{0{,}855x}{x} \cdot 100\% = 85{,}5\%$$

$100\% - 85{,}5\% = 14{,}5\%$
Początkową cenę płaszcza w stosunku do obecnej obniżono o 14,5%.

Schemat oceniania
4 punkty – obliczenie, o ile procent obniżono początkową cenę płaszcza w stosunku do obecnej.
3 punkty – poprawne sposób obliczenia, o ile procent obniżono początkową cenę płaszcza w stosunku do obecnej.
2 punkty – zapisanie ceny płaszcza po drugiej obniżce.
1 punkt – zapisanie ceny płaszcza po pierwszej obniżce.
0 punktów – rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania.

Zadanie 24.
Przykładowe rozwiązanie
$2n + 1$, $2n + 3$ – dwie kolejne liczby nieparzyste

$$(2n+3)^2 - (2n+1)^2 = 4n^2 + 12n + 9 - 4n^2 - 4n - 1 = 8n + 8 = 8(n+1)$$

$8(n + 1)$ jest podzielne przez 8.

Schemat oceniania
3 punkty – wykazanie, że wynik jest podzielny przez 8.
2 punkty – zastosowanie wzoru skróconego mnożenia (zapisanie wyrażenia $(2n+3)^2 - (2n+1)^2$ w postaci sumy jednomianów).

1 punkty – poprawne zapisanie różnicy kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych w postaci sumy algebraicznej.
0 punktów – rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania.

Zadanie 25.
Przykładowe rozwiązanie
x – pojemność cysterny

60% – 40% = 20%

$$\frac{20\%}{600} = \frac{100\%}{x}$$

$0{,}2x = 600$

$x = 3000$ (l)

Pojemność tej cysterny to 3000 litrów.

Schemat oceniania
3 punkty – obliczenie pojemności cysterny (3000 litrów).
2 punkty – poprawny sposób obliczenia pojemności cysterny.
1 punkt – zauważenie różnicy procentowej między napełnieniem cysterny w 60% i w 40%.
0 punktów – rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania.

Zadanie 26.
Przykładowe rozwiązania

I sposób rozwiązania
x – liczba kredek w trzecim pudełku; jest 2 razy mniejsza od liczby pozostałych kredek, czyli
$x + 2x = 120$
$x = 40$

y – liczba kredek w pierwszym pudełku; jest 3 razy mniejsza od liczby pozostałych kredek, czyli
$y + 3y = 120$
$y = 30$
120 – (30 + 40) = 50 – liczba kredek w drugim pudełku
W pierwszym pudełku jest 30 kredek, w drugim 50 kredek, a w trzecim 40 kredek.

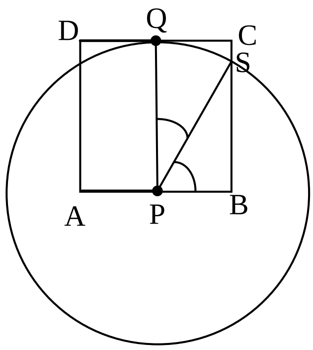
II sposób rozwiązania
x – liczba kredek w pierwszym pudełku
y – liczba kredek w drugim pudełku
z – liczba kredek w trzecim pudełku
$x + y + z = 120$
$x + y$ – liczba kredek w drugim pudełku po przełożeniu do niego wszystkich kredek z pierwszego pudełka
$2z$ – liczba kredek w drugim pudełku po przełożeniu do niego wszystkich kredek z pierwszego pudełka
$x + y = 2z$
$2z + z = 120$
$3z = 120$
$z = 40$ – liczba kredek w trzecim pudełku

$z + y$ – liczba kredek w drugim pudełku po przełożeniu do niego wszystkich kredek z trzeciego pudełka
$3x$ – liczba kredek w drugim pudełku po przełożeniu do niego wszystkich kredek z trzeciego pudełka
$z + y = 3x$
$x + 3x = 120$
$4x = 120$
$x = 30$ – liczba kredek w pierwszym pudełku
$120 – (30 + 40) = 50$ – liczba kredek w drugim pudełku
W pierwszym pudełku jest 30 kredek, w drugim 50 kredek, a w trzecim 40 kredek.

Schemat oceniania
4 punkty – poprawne obliczenie liczby kredek w poszczególnych pudełkach.
3 punkty – poprawny sposób obliczenia liczby kredek w poszczególnych pudełkach.
2 punkty – poprawne ustalenie zależności między liczbami kredek w pudełkach w obu przypadkach przełożeń kredek.
1 punkt – poprawne ustalenie zależności między liczbami kredek w pudełkach dla jednego z przełożeń.
0 punktów – rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania.

Zadanie 27.
Przykładowe rozwiązanie

Rysunek pomocniczy



Ponieważ Q jest punktem styczności okręgu i boku kwadratu, to odcinek PQ jest prostopadły do boków kwadratu DC i AB.
Długość boku kwadratu jest równa r.
$|PQ| = |PS| = r$

$|PB| = \frac{1}{2}r$

$\triangle PBS$ jest połową trójkąta równobocznego, bo jest prostokątny i $|PB| = \frac{1}{2}|PS|$.

Miara $\sphericalangle SPB$ jest równa 60°.
Miara ∢SPQ jest równa 30°, ponieważ kąt QPB jest prosty.

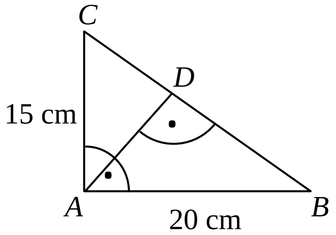
Schemat oceniania
4 punkty – obliczenie miary kąta SPQ.
3 punkty – zauważenie, że $\triangle PBS$ jest połową trójkąta równobocznego.
2 punkty – wykorzystanie własności prostej stycznej do okręgu.
1 punkt – wykonanie analizy zadania, np. rysunku ilustrującego informacje z treści zadania.
0 punktów – rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania.

Zadanie 28.

Przykładowe rozwiązania

I sposób rozwiązania

Rysunek pomocniczy



Obliczenie długości *BC*

$|CB|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$

$|CB|^2 = 20^2 + 15^2$

$|CB|^2 = 625$

$|CB| = 25\ (\mathrm{cm}^2)$

Obliczenie długości *AD*

$P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC|$

$P_{ABC} = \frac{1}{2}|BC| \cdot |AD|$

$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15$

$P_{ABC} = 150\ (\mathrm{cm}^2)$

$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot |AD|$

$12{,}5|AD| = 150$

$|AD| = 12\ (\mathrm{cm})$

Obliczenie długości odcinka *CD* z twierdzenia Pitagorasa

$12^2 + |CD|^2 = 15^2$

$|CD|^2 = 225 - 144$

$|CD|^2 = 81$

$|CD| = 9\ (\mathrm{cm})$

Obliczenie długości *BD*

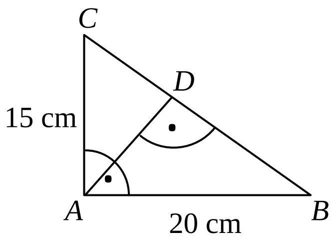
$|BD| = 25 - 9$

$|BD| = 16\ (\mathrm{cm})$

Odcinki *CD* i *BD* mają odpowiednio długości 9 cm i 16 cm.

II sposób rozwiązania

Rysunek pomocniczy



Obliczenie długości *BC*

$|CB|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$

$|CB|^2 = 20^2 + 15^2$

$|CB|^2 = 625$

$|CB| = 25\ (\mathrm{cm}^2)$

Trójkąt *ADC* jest podobny do trójkąta *ABC*, ponieważ oba trójkąty są prostokątne i mają jeden kąt wspólny.

Obliczenie skali podobieństwa trójkąta *ADC* do trójkąta *ABC*

$k = \dfrac{|AC|}{|CB|}$

$k = \dfrac{15}{25}$

$k = \dfrac{3}{5}$

Obliczenie długości odcinka *DC*

$\dfrac{|CD|}{|AC|} = \dfrac{3}{5}$

$|CD| = \dfrac{3 \cdot 15}{5}$

$|CD| = 9\ (\mathrm{cm})$

Obliczenie długości *BD*

$|BD| = 25 - 9$

$|BD| = 16\ (\mathrm{cm})$

Odcinki *CD* i *BD* mają odpowiednio długości 9 cm i 16 cm.

<u>Schemat oceniania</u>

I sposób rozwiązania

5 punktów – obliczenie długości odcinków *BD* i *DC*.

4 punkty – poprawny sposób obliczenia długości jednego z odcinków *BD* lub *DC*.

3 punkty – poprawny sposób obliczenia wysokości *AD* trójkąta *ABC*.

2 punkty – zauważenie, że można posłużyć się polem trójkąta *ABC* do obliczenia wysokości *AD*.

1 punkt – zastosowanie tw. Pitagorasa do obliczenia długości przeciwprostokątnej *BC*.

0 punktów – rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania.

II sposób rozwiązania
5 punktów – obliczenie długości odcinków *BD* i *DC*.
4 punkty – poprawny sposób obliczenia długości jednego z odcinków *BD* lub *DC*.
3 punkty – obliczenie skali podobieństwa trójkątów *ABC* i *ADC* lub trójkątów *ABC* i *ADB*.
2 punkty – zauważenie podobieństwa trójkątów *ABC* i *ADC* lub trójkątów *ABC* i *ADB*.
1 punkt – zastosowanie tw. Pitagorasa do obliczenia długości przeciwprostokątnej *BC*.
0 punktów – rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania.

Zadanie 29.
Przykładowe rozwiązania
I sposób rozwiązania
Objętość tego ostrosłupa jest równa różnicy objętości sześcianu (V) i sumy objętości czterech narożnych ostrosłupów ($4V_o$).
Każdy z narożnych ostrosłupów ma trzy prostopadłe wzajemnie krawędzie o długości $2a$. Objętość jednego z nich, to

$$V_o = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(2a)^2\cdot 2a = \frac{8a^3}{6} = \frac{4a^3}{3}$$

Objętość powstałej bryły

$$V - 4V_o = 8a^3 - 4\cdot\frac{4a^3}{3} = 8a^3 - \frac{16a^3}{3} = \frac{24a^3}{3} - \frac{16a^3}{3} = \frac{8a^3}{3}$$

Objętość tego ostrosłupa jest równa $\frac{8a^3}{3}$.

II sposób rozwiązania
Ten ostrosłup jest czworościanem foremnym o długości krawędzi $2a\sqrt{2}$.

$$V_{cz} = \frac{\left(2a\sqrt{2}\right)^3\sqrt{2}}{12}$$

$$V_{cz} = \frac{8a^3\cdot 4}{12}$$

$$V_{cz} = \frac{8a^3}{3}$$

Schemat oceniania
I sposób rozwiązania
5 punktów – poprawne obliczenie objętości ostrosłupa.
4 punkty – poprawny sposób obliczenia objętości ostrosłupa.
3 punkty – poprawny sposób obliczenia objętości jednego narożnego ostrosłupa.
2 punkty – obliczenie pola podstawy narożnego ostrosłupa.
1 punkt – zauważenie, że każdy z narożnych ostrosłupów ma trzy prostopadłe wzajemnie krawędzie o długości $2a$.
0 punktów – rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania.

II sposób rozwiązania
5 punktów – poprawne obliczenie objętości czworościanu.
4 punkty – poprawny sposób obliczenia objętości czworościanu.

3 punkty – poprawne podanie lub wyprowadzenie wzoru na objętość czworościanu foremnego.

2 punkty – obliczenie lub zapisanie długości krawędzi czworościanu $\left(2a\sqrt{2}\right)$.

1 punkt – zauważenie, że ostrosłup jest czworościanem foremnym.

0 punktów – rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania.