Kod ucznia | | | | |

Data urodzenia ucznia | | | | | | | | |

Dzień **Miesiąc** **Rok**

Wojewódzki Konkurs Matematyczny

dla uczniów szkół podstawowych województwa wielkopolskiego

STOPIEŃ SZKOLNY rok szkolny 2019/2020

Instrukcja dla ucznia

1. Sprawdź, czy test zawiera **15 stron**. Ewentualny brak stron lub inne usterki zgłoś Komisji przed rozpoczęciem konkursu.
2. Czytaj uważnie wszystkie teksty i zadania. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra piszącego czarnym lub niebieskim kolorem. Nie używaj korektora.
3. Test, do którego przystępujesz, zawiera **33 zadania**. Wśród nich są zadania zamknięte i zadania otwarte wymagające krótszej lub dłuższej odpowiedzi. Zadania zamknięte to zadania od 1 do 25.
4. W każdym **zadaniu zamkniętym** wybierz tylko **jedną odpowiedź** i zamaluj długopisem/piórem odpowiednią kratkę na karcie odpowiedzi, np. gdy wybrałeś odpowiedź „A”:

A	B	C	D

Wybierz właściwą odpowiedź i zamaluj kratkę z odpowiednimi literami, np. gdy wybrałeś odpowiedź „FF”

PP	PF	FP	FF

Jeśli się pomylisz, błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz inną odpowiedź np:

A	B	C	D

Za każdą poprawnie udzieloną odpowiedź otrzymasz jeden punkt, a za odpowiedzi błędne lub brak odpowiedzi – zero punktów.

5. W zadaniach **otwartych** zapisz rozwiązania starannie i czytelnie w miejscach wyznaczonych przy poszczególnych zadaniach. Pamiętaj, że pominięcie uzasadnienia lub części obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów. Pomyłki przekreślaj (nie stosuj korektora)
6. Rozwiązując zadania, możesz korzystać z przyborów geometrycznych (linijki i cyrkla) oraz ze strony oznaczonej jako **brudnopis**. Zapisy w brudnopisie nie będą sprawdzane i oceniane.
7. Podczas trwania konkursu nie możesz korzystać z żadnych pomocy naukowych (w tym również kalkulatora i urządzeń elektronicznych) i podpowiedzi kolegów – narażasz ich i siebie na dyskwalifikację. Nie wolno Ci również zwracać się z jakimikolwiek wątpliwościami do członków Komisji.
8. Do etapu rejonowego zakwalifikują się uczniowie, którzy zdobędą co najmniej **80% punktów, czyli 40 punktów.**
9. Na udzielenie odpowiedzi masz **90 minut.**

Życzymy Ci powodzenia!

Wypełnia Komisja (po rozkodowaniu prac)

……………………………………………………………………………………. Uczeń uzyskał: ……….. /50 pkt

Imię i nazwisko ucznia

Zadanie 1 (1p.)

Dana jest dwunastocyfrowa liczba 811 111 111 1x4. Jeśli ta liczba jest podzielna przez 9, to cyfrą x jest:

A. 6 B. 0 C. 9 D. 5

Zadanie 2 (1p.)

Wskaż równość prawdziwą.

A. $-123^2 = (-123)^2$ B. $123^3 = (-123)^3$

C. $\sqrt{(-123)^2} = -123$ D. $\sqrt[3]{-123} = -\sqrt[3]{123}$

Zadanie 3 (1p.)

Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, których iloczyn cyfr wynosi 5?

A. 1 B. 4 C. 3 D. 2

Zadanie 4 (1p.)

Jaka cyfra znajduje się na 40 miejscu po przecinku liczby 213,2356785678…=213,23(5678)

A. 5 B. 7 C. 6 D. 8

Zadanie 5 (1p.)

Wartość bezwzględna trzeciej potęgi liczby $-30:(-6+9)—(-8)$ wynosi:

A. 8 B. 2 C. 4 D. inna odpowiedź

Zadanie 6 (1p.)

Spośród czterech kątów, które razem tworzą kąt półpełny, każdy następny jest dwa razy większy od poprzedniego. Największy z tych kątów ma miarę

A. 88° B. 120° C. 96° D. 80°

Zadanie 7 (1p.)

Z drutu o długości 48 cm zbudowano szkielet sześcianu. Pole tego sześcianu wynosi:

A. 16 cm^2 B. 256 cm^2 C. 64 cm^2 D. 96 cm^2

Zadanie 8 (1p.)

Buty po 30% obniżce kosztują 105 zł. O jaką kwotę zostały przecenione buty?

A. 55 zł B. 25 zł C. 45 zł D. 35 zł

Brudnopis

Zadanie 9 (1p.)

Pociąg jadący z prędkością 102km/h w ciągu 5 minut pokona odległość równą:

A. 8,5 km B. 5,1 km C. 10,2 km D. 17 km

Zadanie 10 (1p.)

Zmniejszając długość prostokąta o 20% i zwiększając szerokość prostokąta o 20% otrzymamy prostokąt, którego pole?

A. Nie zmieni się B. wzrośnie o 4% C. zmaleje o 4% D. zmaleje o 10%

Zadanie 11 (1p.)

Ala pożyczyła od siostry pewną sumę pieniędzy na trzy miesiące. W pierwszym miesiącu spłaciła 2/5 pożyczonej kwoty, a w drugim 1/3 kwoty, która pozostała do spłacenia. Jaka część pożyczki zostanie Ali do spłacenia w trzecim miesiącu?

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{10}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $\frac{2}{5}$

Zadanie 12 (1p.)

Jak zmieni się iloraz dwóch liczb dodatnich, jeśli dzielną zwiększymy dwukrotnie, a dzielnik zmniejszymy dwukrotnie?

A. Wzrośnie dwukrotnie B. zmaleje dwukrotnie

C. Zmaleje czterokrotnie D. Wzrośnie czterokrotnie

Zadanie 13 (1p.)

Wartość wyrażenia $-\frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + 2 \ dla \ x = -1$ wynosi:

A. $4\frac{5}{6}$ B. $5\frac{1}{6}$ C. $4\frac{1}{6}$ D. $5\frac{5}{6}$

Zadanie 14 (1p.)

Przekątna czworokąta ma długość 13 cm i dzieli czworokąt na dwa trójkąty, z których jeden ma obwód 29 cm, a drugi 28 cm. Obwód czworokąta wynosi:

A. 44 cm B. 57 cm C. 31 cm D. 34 cm

Zadanie 15 (1p.)

Pewien graniastosłup ma 60 wierzchołków. Liczba krawędzi tego graniastosłupa wynosi:

A. 180 B. 90 C. 60 D. 32

Brudnopis

Zadanie 16 (1p.)

Dwa boki trójkąta mają długość 5 i $6\frac{1}{2}$, a obwód tego trójkąta jest liczbą naturalną. Trzeci bok tego trójkąta może mieć maksymalną długość równą:

A.11 B.9,5 C. 10,5 D. 7,5

Zadanie 17 (1p.)

Oto dwoje spośród wielu polskich uczonych, którzy zasłynęli na świecie:

Maria Skłodowska -Curie i Mikołaj Kopernik.

Maria Skłodowska-Curie
1867-1934

Mikołaj Kopernik
1473-1543

Czy w poniższych zdaniach prawidłowo zapisano liczby? Zaznacz właściwą odpowiedź.

Mikołaj Kopernik urodził się w roku MCCCCLXXIII.	P	F
Maria Skłodowska-Curie żyła LXVII lat.	P	F

Zadanie 18 (1p.)

Dane są cztery liczby: $a = (2^3)^{17},\ b = 4^{24}, c = 10^{49} \cdot (0,2)^{49},\ d = 8^{50} : 4^{50}$.

Która z nich jest najmniejsza?

A. a B. b C. c D. d

Zadanie 19 (1p.)

Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Pierwiastek kwadratowy z liczby a jest równy 35, więc pierwiastek kwadratowy z liczby 4a jest równy 140.	P	F
Pierwiastek sześcienny z liczby c jest równy $\frac{3}{8}$, więc pierwiastek sześcienny z liczby 8c jest równy 0,75	P	F

Brudnopis

Zadanie 20 (1p.)

W szufladzie znajduje się 12 białych i 10 czarnych identycznych skarpetek. Z zamkniętymi oczami wyciągamy z szuflady pewną ilość skarpetek. Ile co najmniej skarpetek należy wyciągnąć z szuflady, aby po otworzeniu oczu otrzymać parę skarpetek tego samego koloru?

A. 3 B. 11 C. 12 D. 10

Zadanie 21 (1p.)

Działkę o powierzchni 20 ha. Należy podzielić na działki każda o powierzchni 500m^2.
Ile otrzymamy takich działek?

A. 40 B. 400 C. 200 D. 4000

Zadanie 22 (1p.)

Pewien koszykarz zdobył w 13 rzutach 32 punkty. Każdy z rzutów był oceniany za 2 albo za 3 punkty. Liczba rzutów za 3 punkty wynosiła

A. 6 B. 7 C. 8 D. 5

Zadanie 23 (1p.)

Liczba przeciwna do rozwiązania równania $2x - \frac{5x-2}{2} = 3$ wynosi:

A. 8 B. 1 C. -8 D. 4

Zadanie 24 (1p.)

Wartość wyrażenia $\sqrt{36 \cdot 4^2 + 36 \cdot 3^2}$ wynosi

A. 42 B. 30 C. 150 D. inna odpowiedź

Zadanie 25 (1p.)

Pani Barbara w ciągu 6 godzin zaadresowała 108 listów. Ile listów zaadresowała pani Barbara w ciągu 30 minut?

A. 6 B. 12 C. 9 D. 8

Brudnopis

Zadanie otwarte

Zadanie 26 (4p.)

O liczbie 208 można powiedzieć, że

A.	Jest liczbą złożoną	Prawda	Fałsz
B.	Ma 10 dzielników naturalnych	Prawda	Fałsz
C.	Jest dzielnikiem liczby 832	Prawda	Fałsz
D.	Pomniejszona o 7 jest liczbą pierwszą	Prawda	Fałsz

Zacieniuj prawidłową odpowiedź w tabeli.

Zadanie 27 (3p.)

Sumę 100 składników zmieniono następująco:

pierwszy składnik zwiększono o 1, drugi zmniejszono o 2, trzeci składnik zwiększono o 3,

czwarty składnik zmniejszono o 4, piąty składnik zwiększono o 5, szósty zmniejszono o 6

itd………… setny składnik zmniejszono o 100.

O ile zmieniła się wartość tej sumy? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 28 (3p.)

Dwa lata temu Kasia była 3 razy starsza od Ani. Ile lat będą mieć w sumie dziewczynki za 3 lata, jeśli przez x oznaczymy wiek Ani obecnie. Zapisz odpowiedź w postaci sumy algebraicznej.

Zadanie 29 (3p.)

Do akwarium w kształcie prostopadłościanu o wymiarach podstawy 50 cm na 80 cm, częściowo wypełnionego wodą, dolano jeszcze 20 litrów wody. O ile centymetrów podniesie się poziom wody w akwarium?

Zadanie 30 (2p.)

Kąt rozwarty między przekątnymi prostokąta wynosi 120° , a długość krótszego boku prostokąta wynosi 12 cm. Oblicz długość przekątnej tego prostokąta.

Zadanie 31 (4p.)

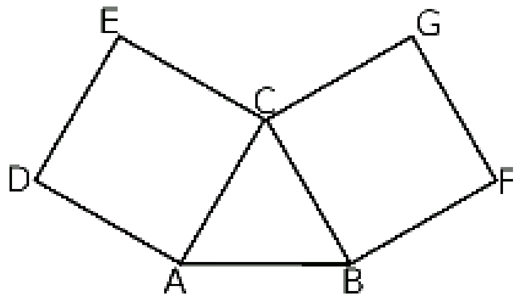
Krótsza przekątna trapezu prostokątnego dzieli go na dwa trójkąty prostokątne równoramienne. Oblicz pole trapezu, jeśli wysokość tego trapezu wynosi 4 cm.

Zadanie 32 (3p.)

Na końcu pewnej liczby naturalnej dodatniej x dopisano cyfrę 0. Otrzymana liczba jest większa od początkowej liczby o 648. Wyznacz wartość liczby x.

Zadanie 33 (3p.)

Na bokach trójkąta równobocznego zbudowano dwa kwadraty w sposób pokazany na rysunku. Udowodnij, że kąt EAF jest prosty.



Brudnopis

Karta odpowiedzi do zadań zamkniętych

Kod ucznia | | | | |

Data urodzenia ucznia | | | | | | | | |

Dzień **Miesiąc** **Rok**

Wypełnia komisja

Suma punktów za zadania zamknięte

Suma punktów za zadania otwarte

Suma punktów za cały arkusz

Numer zadania	**Odpowiedzi**				Liczba punktów
1.	A	B	C	D	
2.	A	B	C	D	
3.	A	B	C	D	
4.	A	B	C	D	
5.	A	B	C	D	
6.	A	B	C	D	
7.	A	B	C	D	
8.	A	B	C	D	
9.	A	B	C	D	
10.	A	B	C	D	
11.	A	B	C	D	
12.	A	B	C	D	
13.	A	B	C	D	
14.	A	B	C	D	
15.	A	B	C	D	
16	A	B	C	D	
17	PP	PF	FP	FF	
18.	A	B	C	D	
19	PP	PF	FP	FF	
20.	A	B	C	D	
21.	A	B	C	D	
22.	A	B	C	D	
23.	A	B	C	D	
24.	A	B	C	D	
25	A	B	C	D	

Wojewódzki Konkurs Matematyczny

dla uczniów szkół podstawowych województwa wielkopolskiego

STOPIEŃ SZKOLNY rok szkolny 2019/2020

Klucz punktowania zadań zamkniętych i schemat oceniania zadań otwartych

1. **Klucz punktowania zadań zamkniętych.**
   Za każdą poprawną odpowiedź uczeń otrzymuje 1 punkt.

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Poprawna odpowiedź	A	D	B	C	A	C	D	C	A	C	D	D	B	C	B	C	FP	B	FP	A	B	A	D	B	C

2. Przykładowe rozwiązania i schemat oceniania zadań otwartych.

Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania nieuwzględnione w schemacie punktowania przyznajemy maksymalną liczbę punktów należnych za to zadanie.

UWAGA : Nie jest wymagana od ucznia na końcu zadania wyraźnie sformułowana odpowiedź słowna wystarczy, że uczeń wyznaczy, obliczy szukaną wartość, bądź przeprowadzi argumentację w zadaniu na dowodzenie.

Zadanie 26 (4p.) O liczbie 208 można powiedzieć, że

A.	Jest liczbą złożoną	Prawda	Fałsz
B.	Ma 10 dzielników naturalnych	Prawda	Fałsz
C.	Jest dzielnikiem liczby 832	Prawda	Fałsz
D.	Pomniejszona o 7 jest liczbą pierwszą	Prawda	Fałsz

A. 208 jest liczbą złożoną bo ma więcej niż dwa dzielniki naturalne. $208 = 2^4 \cdot 13$
B. Dzielniki liczby 208 są postaci $2^k \cdot 13^n$, gdzie k=0,1,2,3,4 i n=0,1. Zatem liczba dzielników wynosi $5 \cdot 2 = 10$. Uczeń może też wypisać wszystkie dzielniki naturalne i je zliczyć.
C. 832:208 = 4. Zatem 208 jest dzielnikiem 832.
D. 208 -7 =201. Liczba 201 nie jest liczbą pierwszą ponieważ jest podzielna przez inne liczby naturalne inne niż 1 i 207 np. jest liczbą podzielną przez 3.
Za każdą poprawną odpowiedź uczeń otrzymuje jeden punkt. Uczeń w tym zadaniu nie musi przedstawiać rozwiązania. Punktujemy jedynie zaznaczone odpowiedzi w tabeli.

Schemat oceniania: Uczeń otrzymuje

4 punkty – gdy wszystkie odpowiedzi ma poprawne,

3 punkty – gdy 3 odpowiedzi są poprawne,

2 punkty – gdy 2 są odpowiedzi ma poprawne,

1 punkt – gdy 1 odpowiedź jest poprawna,

0 punktów – gdy wszystkie odpowiedzi są błędne.

Zadanie 27 (3p.)

Sumę 100 składników zmieniono następująco:

pierwszy składnik zwiększono o 1, drugi zmniejszono o 2, trzeci składnik zwiększono o 3,

czwarty składnik zmniejszono o 4, piąty składnik zwiększono o 5, szósty zmniejszono o 6

itd………… setny składnik zmniejszono o 100.

O ile zmieniła się wartość tej sumy?

Odpowiedź uzasadnij.

Przykładowe rozwiązanie

1. Przez $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{100}$ oznaczmy składniki pierwszej sumy zatem:

$S_I = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ \dots + a_{100}$

2. Przez $a_1 + 1, a_2 - 2, a_3 + 3, a_4 - 4, a_5 + 5, \dots, a_{99} + 99, a_{100} - 100$ oznaczmy składniki drugiej sumy zatem:

$S_{II} = (a_1 + 1) + (a_2 - 2) + (a_3 - 3) + (a_4 - 4) + (a_5 - 5) + \ \dots + (a_{99} + 99) + (a_{100} - 100)$

$S_{II} = a_1 + 1 + a_2 - 2 + a_3 - 3 + a_4 - 4 + a_5 - 5 + \ \dots + a_{99} + 99 + a_{100} - 100$

$S_{II} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ \dots + a_{100} + (1 - 2) + (3 - 4) + (5 - 6) + \cdots . + (99 - 100)$

$S_{II} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ \dots + a_{100} + 50 \cdot (-1)$

$S_{II} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ \dots + a_{100} - 50$

$S_{II} = S_I - 50$

Wartość sumy zmniejszyła się o 50.

Schemat oceniania: Uczeń otrzymuje

3 punkty - gdy poprawnie wyznaczy o ile zmieniła się wartość sumy lub poda odpowiedź, że wartość sumy zmniejszyła się o 50 i będzie to wynikało z przedstawionego rozumowania.

2 punkty – gdy zauważy, że suma każdych dwóch kolejnych składników tzn. pierwszego i drugiego, trzeciego i czwartego, piątego i szóstego i tak dalej zmniejsza się o1 (Musi zobaczyć przynajmniej 3 pary)

1 punkt – gdy

- poda tylko odpowiedź, ale w rozwiązaniu zadania nie będzie przedstawionego żadnego toku rozumowania **lub**
- Zapisze przynajmniej 5 składników nowej sumy np.:
  $a_1 + 1, a_2 - 2, a_3 + 3, a_4 - 4, a_5 + 5$ **lub**
- Zapisze otrzymaną sumę z przynajmniej 5 składników np.:
  $S_{II} = a_1 + 1 + a_2 - 2 + a_3 - 3 + a_4 - 4 + a_5 - 5 + \cdots$

0 punktów – gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania.

Zadanie 28 (3p.)

Dwa lata temu Kasia była 3 razy starsza od Ani. Ile lat będą mieć w sumie dziewczynki za 3 lata, jeśli przez x oznaczymy wiek Ani obecnie. Zapisz odpowiedź w postaci sumy algebraicznej.

Przykładowe rozwiązanie

x- wiek Ani obecnie,

$x-2$ – wiek Ani dwa lata temu,

$3(x-2)-$ wiek Kasi dwa lata temu,

$3(x-2)+2=3x-4$ - wiek Kasi obecnie,

$x+3$ - wiek Ani za trzy lata,

$(3x-4)+3=3x-1$ - wiek Kasi za trzy lata.

$(x+3)+(3x-1)=4x+2$ - suma wieku Kasi i Ani za trzy lata.

Kasia i Ania za trzy lata będą mieć w sumie $4x+2$ lat.

Schemat oceniania: Uczeń otrzymuje

3 punkty - gdy poprawnie rozwiąże zadanie i zapisze wyrażenie $4x+2$.

2 punkty – gdy poprawnie zapisze wiek Kasi za trzy lata w postaci $(3x-4)+3$ lub $3x-1$, ale nie obliczy sumy wieku obu dziewcząt lub obliczy z błędem wiek sumy dziewcząt za trzy lata pod warunkiem , że wiek Kasi za trzy lata jest poprawnie obliczony.

1 punkt - gdy poprawnie obliczy wiek Kasi przed dwoma laty $3(x-2)$ lub $3x-6$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

0 punktów – gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania**.**

Zadanie 29 (3p.)

Do akwarium w kształcie prostopadłościanu o wymiarach podstawy 50 cm na 80 cm, częściowo wypełnionego wodą, dolano jeszcze 20 litrów wody. O ile centymetrów podniesie się poziom wody w akwarium?

Przykładowe rozwiązanie

x – szukana wielość, o którą podniesie się poziom wody w akwarium

$V_{wody}=20l=20000cm^3$

$V_{wody}=objętośc\ prostopadłościnu\ o\ wymiarach\ 50cm\ , 80\ cm\ , x\ cm$

$V_{wody}=50\cdot 80\cdot x$

$20000=50\cdot 80\cdot x$

$20000=4000\cdot x/:4000$

$x=5$

Poziom wody w akwarium podniesie się o 5 cm.

Schemat oceniania: Uczeń otrzymuje

3 punkty - gdy poprawnie rozwiąże zadanie i zapisze, że poziom wody podniesie się o 5cm,

2 punkty – gdy poprawnie ułoży równanie $20000 = 50 \cdot 80 \cdot x$ i na tym poprzestanie lub rozwiąże równanie $20000 = 50 \cdot 80 \cdot x$ z błędem rachunkowym,

1 punkt – gdy wyznaczy objętość wody w cm^3 lub gdy zauważy, że dolana woda tworzy prostopadłościan o wymiarach 50 cm , 80 cm , x cm i zapisze objętość prostopadłościanu $V = 50 \cdot 80 \cdot x$

0 punktów – gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania**.**

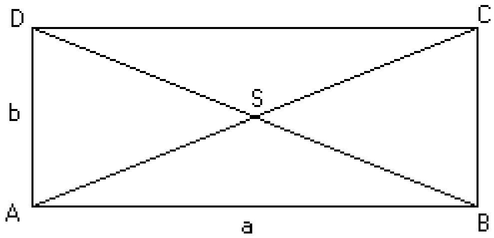
Zadanie 30 (2p.)

Kąt rozwarty między przekątnymi prostokąta wynosi 120° , a długość krótszego boku prostokąta wynosi 12 cm. Oblicz długość przekątnej tego prostokąta.

Przykładowe rozwiązania

1 metoda

Niech AB będzie dłuższym bokiem prostokąta ABCD, a BC=12 cm krótszym bokiem prostokąta ABCD. Przez punkt S oznaczmy punkt przecięcia między przekątnymi. Patrz rysunek.



$< ASB = 120^\circ$ z tego wynika, że $< BSC = 60^\circ$.

Przekątne w prostokącie są równe i przecinają się w punkcie, który dzieli je na połowy. Zatem trójkąt BSC jest trójkątem równoramiennym o kącie między ramionami 60°. Zauważmy, że trójkąt BSC jest trójkątem równobocznym.

$|BS| = |SC| = |BC| = 12cm$ z tego wynika, że $|AC| = |BD| = 2 \cdot |BS| = 24\ cm$

Przekątna prostokąta ma długość równą 24 cm.

2 metoda

Niech AB będzie dłuższym bokiem prostokąta ABCD, a BC=12 cm krótszym bokiem prostokąta ABCD. Przez punkt S oznaczmy punkt przecięcia między przekątnymi. Patrz rysunek.

Zauważmy, że trójkąt np. ABS jest prostokątny o kątach ostrych $60^\circ\ i\ 30^\circ$. Z zależności między bokami w trójkącie $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ możemy wyznaczyć $|AC| = 2 \cdot |BC| = 24\ cm$

Schemat oceniania 1 metody: Uczeń otrzymuje

2 punkty - gdy poprawnie wyznaczy długość przekątnej $|AC| = |BD| = 24cm$,

1 punkt – gdy zauważy że trójkąt BSD lub ASD jest trójkątem równobocznym i na tym zakończy lub wyznaczy błędnie długość przekątnej,

0 punktów - gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania.

Schemat oceniania 2 metody

2 punkty – gdy poprawnie wyznaczy długość przekątnej $|AC| = |BD| = 24cm$

1 punkt – gdy zauważy, że przekątna prostokąta dzieli trójkąt na dwa trójkąty prostokątne o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ i wyznaczy błędnie długość przekątnej lub jej nie wyznaczy.

0 punktów - gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania.

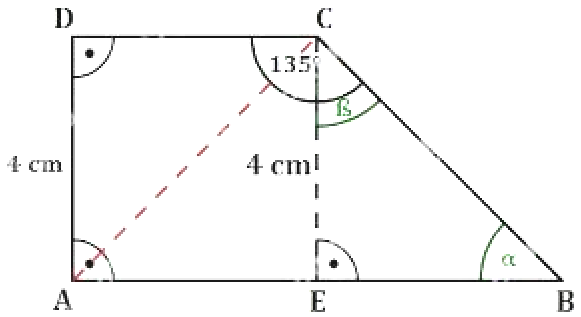
Zadanie 31 (4.)

Krótsza przekątna trapezu prostokątnego dzieli go na dwa trójkąty prostokątne równoramienne. Oblicz pole trapezu, jeśli wysokość tego trapezu wynosi 4 cm.

<u>*Przykładowe rozwiązania*</u>

<u>**1 metoda**</u>

Rysunek pomocniczy



1.Trójkąt ADC jest prostokątny równoramienny zatem $|AD| = |DC| = 4cm$ i $\sphericalangle ACD = \sphericalangle CAD = 45^\circ$

2.Trójkąt ABC jest prostokątny równoramienny zatem:

$|AC| = |BC|\ i\ \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = 45^\circ\ i\ \sphericalangle ACB = 90^\circ$.

Wysokość $|CE| = |DA| = 4cm$.

3.W trójkącie prostokątnym równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę dzieli trójkąt na dwa trójkąty prostokątne równoramienne przystające.

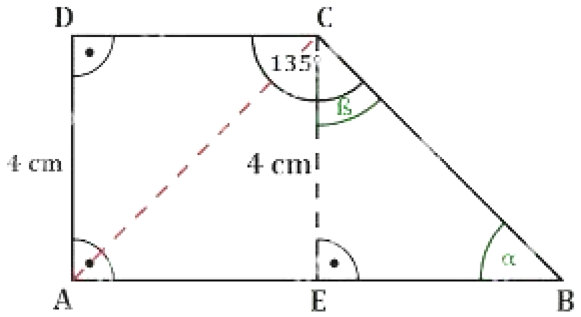
Zatem $|AE| = |BE| = |CE| = 4cm$

$|AB| = 2 \cdot |BE| = 8cm$

4. $P_{ABCD} = \frac{(|AB| + |CD|) \cdot |AD|}{2} = \frac{(8cm + 4cm) \cdot 4cm}{2} = 24cm^2$

<u>2 metoda</u>

Rysunek pomocniczy



1.Trójkąt ADC jest prostokątny równoramienny zatem $|AD| = |DC| = 4cm$ i

$\sphericalangle ACD = \sphericalangle CAD = 45^\circ\ i\ \sphericalangle ADC = 90^\circ$

2. Z własności trójkąta $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ $|AC| = 4\sqrt{2}\ cm$

3.Trójkąt ABC jest prostokątny równoramienny zatem $|AC| = |BC| = 4\sqrt{2}\,cm$ i

$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = 45^\circ\ i\ \sphericalangle ACB = 90^\circ$

Z własności trójkąta $45^\circ, 45^\circ\ 90^\circ$ $|AB| = 4\sqrt{2}\ \cdot \sqrt{2}cm = 8\ cm$

4. $P_{ABCD} = \frac{(|AB| + |CD|) \cdot |AD|}{2} = \frac{(8cm + 4cm) \cdot 4cm}{2} = 24cm^2$

Schemat oceniania 1 metody: Uczeń otrzymuje

4 punkty - gdy poprawnie wyznaczy wielkość pola trapezu $P_{ABCD} = 24cm^2$,

3 punkty – gdy poprawnie wyznaczy długości obu podstaw trapezu i błędnie policzy pole trapezu lub wyznaczy długości obu podstaw trapezu i na tym poprzestanie,

2 punkty –gdy poprawnie wyznaczy długość krótszej podstawy trapezu i na tym poprzestanie lub błędnie wyznaczy długość dłuższej podstawy trapezu,

1 punkt – gdy sporządzi rysunek pomocniczy i zaznaczy kąty proste w otrzymanych trójkątach ACD i ABC oraz zaznaczy przynajmniej jedną parę boków równej długości w jednym z tych trójkątów,

0 punktów - gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania.

Schemat oceniania 2 metody: Uczeń otrzymuje

4 punkty - gdy poprawnie wyznaczy wielkość pola trapezu $P_{ABCD} = 24cm^2$,

3 punkty – gdy poprawnie wyznaczy długości obu podstaw trapezu i błędnie policzy pole trapezu lub wyznaczy długości obu podstaw trapezu i na tym poprzestanie,

2 punkty –

- gdy poprawnie wyznaczy długość krótszej podstawy trapezu i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy **lub**
- gdy poprawnie wyznaczy długość krótszej przekątnej trapezu i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy,

1 punkt

- gdy sporządzeni rysunek pomocniczy i zaznaczy kąty proste w otrzymanych trójkątach ACD i ABC oraz zaznaczy przynajmniej jedną parę boków równej długości w jednym z tych trójkątów **lub**
- gdy zapisze przynajmniej jedną z zależności między bokami w trójkącie ACD lub w trójkącie ABC np.:
  $|AC| = |AD|\sqrt{2}\ lub\ |AC| = |CD|\sqrt{2}\ lub\ |AB| = |AC|\sqrt{2}\ lub\ |AB| = |BC|\sqrt{2}$.

0 punktów – gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania.

Zadanie 32 (3p.)

Na końcu pewnej liczby naturalnej dodatniej x dopisano cyfrę 0. Otrzymana liczba jest większa od początkowej liczby o 648. Wyznacz wartość liczby x.

Przykładowe rozwiązanie

$x -$ szukana liczba naturalna dodatnia

$10x$ - liczba otrzymana po dopisaniu na końcu zera jest dziesięć razy większa od początkowej

$10x = x + 648$

$9x = 648$

$x = 72$

Szukana liczba to 72.

Schemat oceniania: Uczeń otrzymuje

3 punkty - gdy poprawnie wyznaczy wartość szukanej liczby x = 72 poprzez rozwiązanie odpowiedniego równania lub poda odpowiedź 72, ale wykona sprawdzenie, że otrzymana liczba spełnia warunki zadania,

2 punkty – gdy ułoży równanie
$10x = x + 648$ lub $10x - x = 648$ lub $10x - 648 = x$ lub $9x = 648$ i nie rozwiąże go lub rozwiązując popełni błędy

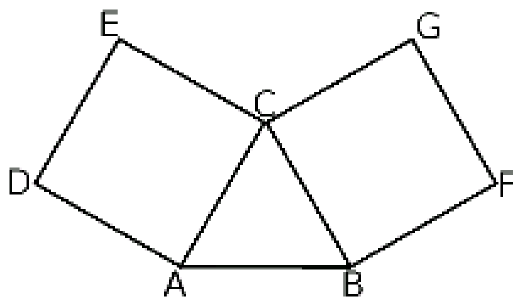
1 punkt – gdy

- Poda odpowiedź 72, ale nie dokona sprawdzenia, że otrzymana liczba spełnia warunki zadania **lub**
- Zapisze, że liczba po dopisaniu 0 na końcu jest równa 10x,

0 punktów – gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania.

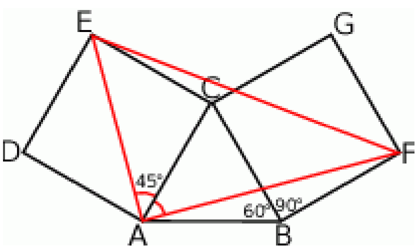
Zadanie 33 (3p.)

Na bokach trójkąta równobocznego zbudowano dwa kwadraty w sposób pokazany na rysunku. Udowodnij, że kąt <EAF jest prosty.



Przykładowe rozwiązanie

1. Dorysujmy kąt EAF lub trójkąt EAF.



Teza: $\sphericalangle EAF = 90^\circ$

Dowód: Zauważmy, że $\sphericalangle EAF = \sphericalangle EAC + \sphericalangle CAF$

1. $\sphericalangle EAC = 45^\circ$ ponieważ jest to kąt między przekątną, a bokiem w kwadracie DACE.

Wystarczy zatem pokazać, że kąt $\sphericalangle CAF = 45^\circ$.

2. $\sphericalangle CAF = \sphericalangle CAB - \sphericalangle FAB = 60^\circ - \sphericalangle FAB$

3. Zauważmy, że trójkąt ABF jest równoramienny i $\sphericalangle ABF = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$

Zatem $\sphericalangle FAB = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$

3. $\sphericalangle CAF = \sphericalangle CAB - \sphericalangle FAB = 60^{\circ} - 15^{\circ} = 45^{\circ}$

Co kończy uzasadnienie.

Schemat oceniania: Uczeń otrzymuje

3 punkty - gdy poprawnie uzasadni, że $\sphericalangle EAF = 90^{\circ}$

Uwaga Akceptujemy dowód przeprowadzony na rysunku. Wystarczy, że uczeń poprawnie zaznaczy na rysunku odpowiednie kąty i ich miary oraz zapisze, że kąt

$\sphericalangle EAF = 90^{\circ}$ lub $\sphericalangle EAF = 45^{\circ} + 45^{\circ} = 90^{\circ}$ lub $\sphericalangle EAF = 45^{\circ} + 60^{\circ} - 15^{\circ} = 90^{\circ}$

2 punkty - gdy wyznaczy miarę kąta $FAC, \sphericalangle FAC = 45^{\circ}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

Uwaga Miara kąta FAC może być zaznaczona na rysunku.

1 punkt –

- gdy zapisze, że $\sphericalangle EAF = \sphericalangle EAC + \sphericalangle CAF$ lub z jego rozwiązania będzie wynikało, że rozumie, że kąt $\sphericalangle EAF$ jest sumą $\sphericalangle EAC\ i\ \sphericalangle CAF$ **lub**
- wyznaczy miarę kąta FAB, $\sphericalangle FAB = 15^{\circ}$ **lub**
- wyznaczy miarę kąta $EAC, \sphericalangle EAC = 45^{\circ}$.

Uwaga Miara kąta FAB lub kąta EAC może być zaznaczona na rysunku.

Kod ucznia				

Data urodzenia ucznia								
	Dzień		Miesiąc		Rok			

Wojewódzki Konkurs Matematyczny

dla uczniów szkół podstawowych województwa wielkopolskiego

STOPIEŃ REJONOWY rok szkolny 2019/2020

Instrukcja dla ucznia

1. Sprawdź, czy test zawiera **17 stron**. Ewentualny brak stron lub inne usterki zgłoś Komisji przed rozpoczęciem konkursu.
2. Czytaj uważnie wszystkie teksty i zadania. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra piszącego czarnym lub niebieskim kolorem. Nie używaj korektora.
3. Test, do którego przystępujesz, zawiera **30 zadań**. Wśród nich są zadania zamknięte i zadania otwarte wymagające krótszej lub dłuższej odpowiedzi. Zadania zamknięte to zadania od 1 do 23.
4. W każdym **zadaniu zamkniętym** wybierz tylko **jedną odpowiedź** i zamaluj długopisem/piórem odpowiednią kratkę na karcie odpowiedzi, np. gdy wybrałeś odpowiedź „A”:

A	B	C	D

Wybierz właściwą odpowiedź i zamaluj kratkę z odpowiednimi literami, np. gdy wybrałeś odpowiedź „FF”

PP	PF	FP	FF

Jeśli się pomylisz, błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz inną odpowiedź np:

A	B	C	D

Za każdą poprawnie udzieloną odpowiedź otrzymasz jeden punkt, a za odpowiedzi błędne lub brak odpowiedzi – zero punktów.

5. W zadaniach **otwartych** zapisz rozwiązania starannie i czytelnie w miejscach wyznaczonych przy poszczególnych zadaniach. Pamiętaj, że pominięcie uzasadnienia lub części obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów. Pomyłki przekreślaj (nie stosuj korektora)
6. Rozwiązując zadania, możesz korzystać z przyborów geometrycznych (linijki i cyrkla) oraz ze strony oznaczonej jako **brudnopis**. Zapisy w brudnopisie nie będą sprawdzane i oceniane.
7. Podczas trwania konkursu nie możesz korzystać z żadnych pomocy naukowych (w tym również kalkulatora i urządzeń elektronicznych) i podpowiedzi kolegów – narażasz ich i siebie na dyskwalifikację. Nie wolno Ci również zwracać się z jakimikolwiek wątpliwościami do członków Komisji.
8. Do etapu wojewódzkiego zakwalifikują się uczniowie, którzy zdobędą co najmniej **84 % punktów, czyli 42 punkty na 50 możliwych.**
9. Na udzielenie odpowiedzi masz **90 minut.**

Życzymy Ci powodzenia!

Wypełnia Komisja (po rozkodowaniu prac)

……………………………………………………………………………………. Uczeń uzyskał: ……….. /50 pkt

Imię i nazwisko ucznia

Zadanie 1 (1p.)

Średnia arytmetyczna długości, szerokości i wysokości pewnego prostopadłościanu wynosi 2,4 dm. Zatem suma długości wszystkich jego krawędzi jest równa:

A. 192 cm B. 288 cm C. 0,96 m D. 216 cm

Zadanie 2 (1p.)

Po wykonaniu wszystkich działań w wyrażeniu $(17 \cdot 4^{6} \cdot 10^{10} \cdot 5^{12})$ uzyskamy liczbę:

A. 24 cyfrową B. 23 cyfrową C. 26 cyfrową D. 25 cyfrową

Zadanie 3 (1p.)

Suma dwóch liczb naturalnych dodatnich wynosi 55. Dzieląc większą z nich przez mniejszą otrzymujemy iloraz 2 i resztę 4. Większa z tych liczb wynosi:

A. 37 B. 40 C. 39 D. 38

Zadanie 4 (1p.)

Przekątna sześcianu o krawędzi 10 ma długość:

A. $10\sqrt{2}$ B. $10\sqrt{3}$ C. $10\sqrt{5}$ D. 20

Zadanie 5 (1p.)

Ile przekątnych ma dziesięciokąt foremny?

A. 70 B. 45 C. 90 D. 35

Zadanie 6 (1p.)

Ania, Kasia, Jurek i Wojtek złożyli się i kupili grę komputerową.
Składki poszczególnych osób były następujące:
Ania - 40 zł, Kasia - 80 zł, Jurek - 30 zł, Wojtek - 50 zł. Wskaż zdanie fałszywe:

A. Jedna z osób wpłaciła 15% ceny gry.
B. Kasia wpłaciła kwotę o 50% większą niż Ania.
C. Dziewczyny wpłaciły 150% tego co wpłacili chłopcy.
D. Wojtek wpłacił 25% ceny gry.

Zadanie 7 (1p.)

Połowa sumy $4^{26} + 4^{26} + 4^{26} + 4^{26}$ jest równa:

A. 2^{28} B. 2^{53} C. 2^{104} D. 2^{27}

Brudnopis

Zadanie 8 (1p.)

Trójkąt $A_1B_1C_1$ ma obwód $36\ cm$ i jest podobny do trójkąta ABC w skali 3. Obwód trójkąta ABC jest równy:

A. $4\ cm$ B. $12\ cm$ C. $32\ cm$ D. $108\ cm$

Zadanie 9 (1p.)

W pewnej 24 osobowej klasie 16 uczniów potrafi jeździć na rolkach, 13 uczniów potrafi jeździć na łyżwach, a 11 uczniów z tej klasy potrafi jeździć zarówno na rolkach i łyżwach. Ilu uczniów tej klasy nie potrafi jeździć ani na rolkach, ani na łyżwach?

A. 0 B. 8 C. 6 D. 4

Zadanie 10 (1p.)

Ze zbioru $\{1,2,3, \dots 60\}$ - sześćdziesięciu kolejnych liczb naturalnych od 1 do 60 losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba jest podzielna przez 6 jest równe

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{11}{60}$ C. $\frac{3}{20}$ D. $\frac{1}{5}$

Zadanie 11 (1p.)

W rombie o boku długości $10\ cm$ krótsza przekątna ma $12\ cm$. Pole tego rombu jest równe:

A. $120\ cm^2$ B. $72\ cm^2$ C. $96\ cm^2$ D. $192\ cm^2$

Zadanie 12 (1p.)

Różnica $5001^2 - 4999^2$ jest równa

A. 200000 B. 2000 C.20000 D. 4

Zadanie 13 (1p.)

Liczba $\left(3-\sqrt{5}\right)^2 + 4\left(3-\sqrt{5}\right)$ jest równa:

A. $26 - 10\sqrt{5}$ B. $20 - 4\sqrt{5}$ C. $16 - 4\sqrt{5}$ D. $26 - 7\sqrt{5}$

Zadanie 14 (1p.)

Cyfrą jedności liczby 3^{30} jest:

A. 3 B. 9 C. 7 D. 1

Brudnopis

Zadanie 15 (1p.)

Rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

Jest para liczb (x, y) takich, że

A. $x > 0 \; i \; y > 0$ B. $x > 0 \; i \; y < 0$ C. $x < 0 \; i \; y > 0$ D. $x < 0 \; i \; y < 0$

Zadanie 16 (1p.)

Kasia i Ania chodzą regularnie o tej samej godzinie na basen. Jola co 6 dni, a Ania co 8 dni. Ostatnio dziewczęta spotkały się we wtorek. W jaki dzień tygodnia nastąpi kolejne spotkanie?

A. wtorek B. piątek C. sobota D. czwartek

Zadanie 17 (1p.)

W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma $5\ cm$ długości , a druga jest o $1\ cm$ krótsza od przeciwprostokątnej. Druga z przyprostokątnych ma długość równą:

A. $13\ cm$ B. $12\ cm$ C. $3\ cm$ D. $4\ cm$

Zadanie 18 (1p.)

Przed wejściem do przychodni lekarskiej znajdują się schody , które mają 12 stopni o wysokości $15\ cm$ każdy. Dla osób poruszających się na wózkach wykonano podjazd o nachyleniu 30°.

Oceń prawdziwość podanych zdań . Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F - jeśli jest fałszywe.

Wysokość podjazdu przekracza $2\ m$.	P	F
Długość podjazdu wynosi $3{,}6\ m$.	P	F

Zadanie19 (1p.)

Ile liczb naturalnych znajduje się w zbiorze rozwiązań nierówności $x \leq 2$?

A. 1 B. 2 C. 3 D. Nieskończenie wiele

Brudnopis

Zadanie 20 (1p.)

Dane są trzy trójkąty $I, II\ i\ III$ o długościach boków:

$I. \sqrt{2}\ cm, \sqrt{3}\ cm, \sqrt{5}\ cm$ $\quad$ $II. 2\ cm, 3\ cm, 4\ cm$ $\quad$ $III. 12\ cm, 5\ cm, 13\ cm$

Trójkątami prostokątnymi są:

A. I i II $\quad$ B. II i III $\quad$ C. I i III $\quad$ D. tylko III

Zadanie 21 (1p.)

Wskaż prędkość równą prędkości $36\frac{km}{h}$.

A. $0{,}6\frac{m}{s}$ $\quad$ B. $1\frac{m}{s}$ $\quad$ C. $6\frac{m}{s}$ $\quad$ D. $10\frac{m}{s}$

Zadanie 22 (1p.)

Liczba $a = \frac{(4{,}2\cdot 10^{15})\cdot(1{,}5\cdot 10^{21})}{0{,}2\cdot 10^{49}}$, zapisana w notacji wykładniczej, jest równa:

A. $31{,}5 \cdot 10^{-13}$ $\quad$ B. $3{,}15 \cdot 10^{-14}$ $\quad$ C. $3{,}15 \cdot 10^{-12}$ $\quad$ D. $31{,}5 \cdot 10^{85}$

Zadanie 23 (1p.)

Stosunek długości trzech krawędzi prostopadłościanu o wspólnym wierzchołku wynosi $2:5:6$. Objętość tego prostopadłościanu wynosi $480\ cm^3$. Zatem pole powierzchni największej ściany tego prostopadłościanu jest równe:

A. $0{,}6\ dm^2$ $\quad$ B. $12\ cm^2$ $\quad$ C. $60\ cm^2$ $\quad$ D. $1{,}2\ dm^2$

Brudnopis

Zadanie otwarte

Zadanie 24 (5p.)

Suma cyfr pewnej liczby naturalnej trzycyfrowej wynosi 21. Jeśli zamienimy miejscami cyfrę setek i jedności w danej liczbie, to otrzymamy liczbę o 198 większą. Wyznacz tę liczbę, jeśli wiadomo, że cyfra dziesiątek danej liczby jest średnią arytmetyczną cyfr skrajnych.

Zadanie 25 (4p.)

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między przekątną graniastosłupa, a przekątną jego podstawy, wychodzącymi z jednego wierzchołka, jest równy 60°. Oblicz objętość tego graniastosłupa jeśli krawędź jego podstawy jest równa $6\ cm$.

Zadanie 26 (3p.)

Udowodnij, że suma 4 kolejnych liczb naturalnych podzielnych przez 3 jest liczbą podzielną przez 6.

Zadanie 27 (2p.)

Ze 150 kg solanki odparowało 60 kg wody i otrzymano roztwór o zawartości 5% soli. Oblicz ile procent soli zawierała solanka przed odparowaniem wody.

Zadanie 28 (4p.)

Za pięć lat syn będzie trzy razy młodszy od ojca, a za dwadzieścia lat ojciec będzie dwa razy starszy od syna. Ile lat ma każdy z nich obecnie?

Zadanie 29 (5p.)

W trapezie równoramiennym, przekątna trapezu dzieli kąt przy dłuższej podstawie na dwie równe części. Wyznacz miarę kąta ostrego tego trapezu, jeśli stosunek długości podstaw trapezu wynosi 1:2.

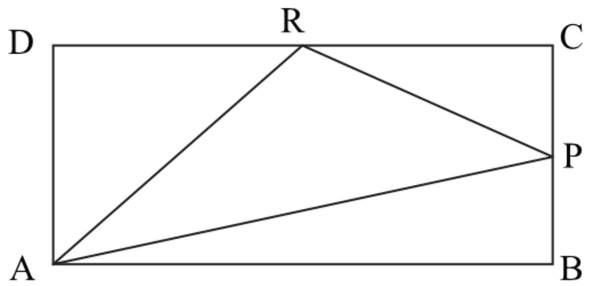
Zadanie 30 (4p.)

W prostokącie $ABCD$ (rysunek) punkt P jest środkiem boku BC, a punkt R jest środkiem boku CD. Wykaż, że $P_{\Delta APR} = P_{\Delta ADR} + P_{\Delta PCR}$, gdzie

$P_{\Delta APR}$ oznacza pole trójkąta APR,

$P_{\Delta ADR}$ oznacza pole trójkąta ADR,

$P_{\Delta PCR}$ oznacza pole trójkąta PCR.



Brudnopis

Brudnopis

Karta odpowiedzi do zadań zamkniętych

Kod ucznia | | | | |

Data urodzenia ucznia | | | | | | | | |

Dzień **Miesiąc** **Rok**

Numer zadania	**Odpowiedzi**	Liczba punktów
1.	A B C D	
2.	A B C D	
3.	A B C D	
4.	A B C D	
5.	A B C D	
6.	A B C D	
7.	A B C D	
8.	A B C D	
9.	A B C D	
10.	A B C D	
11.	A B C D	
12.	A B C D	
13.	A B C D	
14.	A B C D	
15.	A B C D	
16	A B C D	
17	A B C D	
18.	PP PF FP FF	
19	A B C D	
20.	A B C D	
21.	A B C D	
22.	A B C D	
23.	A B C D	

Wypełnia komisja

Suma punktów za zadania zamknięte

Suma punktów za zadania otwarte

Suma punktów za cały arkusz

Wojewódzki Konkurs Matematyczny

dla uczniów szkół podstawowych województwa wielkopolskiego

STOPIEŃ REJONOWY rok szkolny 2019/2020

Klucz punktowania zadań zamkniętych i zasady oceniania zadań otwartych

1. **Klucz punktowania zadań zamkniętych.**
   Za każdą poprawną odpowiedź uczeń otrzymuje 1 punkt.

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Poprawna odpowiedź	B	A	D	B	D	B	B	B	C	A	C	C	A	B	A	B	B	F P	C	C	D	C	D

2. Przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych.

Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania nieuwzględnione w schemacie punktowania przyznajemy maksymalną liczbę punktów należnych za to zadanie.

UWAGA : Nie jest wymagana od ucznia na końcu zadania wyraźnie sformułowana odpowiedź słowna wystarczy, że uczeń wyznaczy, obliczy szukaną wartość, bądź przeprowadzi argumentację w zadaniu na dowodzenie.

Zadanie 24 (5p)

Suma cyfr pewnej liczby naturalnej trzycyfrowej wynosi 21. Jeśli zamienimy miejscami cyfrę setek i jedności w danej liczbie, to otrzymamy liczbę o 198 większą. Wyznacz tę liczbę, jeśli wiadomo, że cyfra dziesiątek danej liczby jest średnią arytmetyczną cyfr skrajnych.

Przykładowe rozwiązanie

x – cyfra setek szukanej liczby, gdzie $x = 1,2,3,4,\dots,9$

y – cyfra jedności szukanej liczby, $y = 1,2,3,4,\dots,9$

$z = \frac{x+y}{2}$ – cyfra dziesiątek szukanej liczby, $jeśli\ \ x = 1,2,3,4,\dots,9\ i\ \ y = 1,2,3,4,\dots,9\ to$

$z = 1,2,3,4,\dots,9$

$100x + 10 \cdot \frac{x+y}{2} + y$ – szukana liczba,

$100y + 10 \cdot \frac{x+y}{2} + x$ – otrzymana liczba po zamianie miejscami cyfry setek z cyfrą jedności

$$\begin{cases} x + \dfrac{x+y}{2} + y = 21 \qquad /\cdot 2 \\ 100x + 10 \cdot \dfrac{x+y}{2} + y + 198 = 100y + 10 \cdot \dfrac{x+y}{2} + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + (x+y) + 2y = 42 \\ 100x + y + 198 = 100y + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 3y = 42 \qquad /:3 \\ 100x + y + 198 = 100y + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 99x - 99y = -198 \qquad /:99 \end{cases}$$

$\begin{cases} x + y = 14 \\ x - y = -2 \end{cases}$ Dodając stronami układ równania tego układu otrzymujemy $2x = 12$.

$$\begin{cases} x = 6 \\ x + y = 14 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \\ \frac{x+y}{2} = 7 \end{cases}$$

Szukana liczba to 678.

Zasady oceniania: Uczeń otrzymuje

5 punktów - gdy poprawnie rozwiąże zadanie i zapisze, że szukana liczba to 678.

4 punkty – gdy

- Rozwiąże poprawnie układ równań i wyznaczy cyfrę setek, jedności i dziesiątek szukanej liczby, ale nie zapisze, że szukana liczba to 678 **lub**
- Rozwiąże poprawnie układ i wyznaczy cyfrę setek, jedności i dziesiątek szukanej liczby, ale zapisze, że szukana liczba to 876 **lub**
- Rozwiąże poprawnie układ równań i wyznaczy poprawnie dwie cyfry szukanej liczby np. cyfrę setek i jedności lub setek i dziesiątek lub dziesiątek i jedności i na tym zakończy **lub**
- Rozwiąże poprawny układ równań z błędami rachunkowymi i otrzyma w wyniku tych błędów inną liczbę trzycyfrową. (Błędne rozwiązania tego układu muszą być cyframi, przy czym cyfra setek i jedności nie mogą być zerem.)

3 punkty – gdy

- Rozwiązując poprawny układ równań wyznaczy poprawnie wartość **tylko jednej** cyfry szukanej liczby np.: x = 6 (cyfrę setek) lub z = 7 (cyfrę dziesiątek) lub y = 8 (cyfrę jedności) i na tym zakończy **lub**
- Rozwiązując poprawny układ równań wyznaczy poprawnie wartość **tylko jednej** cyfry szukanej liczby np.: x = 6 (cyfrę setek) lub z = 7 (cyfrę dziesiątek) lub y = 8 i wyznaczając pozostałe cyfry popełni błędy rachunkowe skutkujące tym, że choć jedna z pozostałych niewiadomych nie jest cyfrą lub cyfra setek bądź jedności jest cyfrą zero.

2 punkty – gdy

- Poprawnie ułoży układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi i na tym zakończy lub dalej popełni błędy, w wyniku których otrzymane niewiadome nie są cyframi **lub**
- Poprawnie ułoży układ trzech równań z trzema niewiadomymi i na tym zakończy lub dalej popełni błędy, w wyniku których otrzymane niewiadome nie są cyframi **lub**
- Poprawnie zapisze równanie z jedną niewiadomą i na tym zakończy lub dalej popełni błędy, w wyniku których otrzymane rozwiązanie nie jest cyfrą.

1 punkt – gdy

- Zapisując układ równań $\begin{cases} x + \frac{x+y}{2} + y = 21 \\ 100x + 10 \cdot \frac{x+y}{2} + y + 198 = 100y + 10 \cdot \frac{x+y}{2} + x \end{cases}$

z dwiema niewiadomymi **tylko jedno z równań** jest poprawne np.

$x + \frac{x+y}{2} + y = 21$ lub $100x + 10 \cdot \frac{x+y}{2} + y + 198 = 100y + 10 \cdot \frac{x+y}{2} + x$ **lub**

- Zapisze poprawnie tylko jedno z równań z układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi, $x+\frac{x+y}{2}+y=21$ lub $100x+10\cdot\frac{x+y}{2}+y+198=100y+10\cdot\frac{x+y}{2}+x$, a drugiego nie zapisze **lub**

- Zapisze układ z trzema niewiadomymi z dwoma równaniami napisanymi bezbłędnie i trzecim błędnym **lub**
- Zapisze dwa równania z trzema niewiadomymi napisane bezbłędnie i trzeciego równania nie zapisze.

0 punktów – gdy

- rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania .

UWAGI !!!

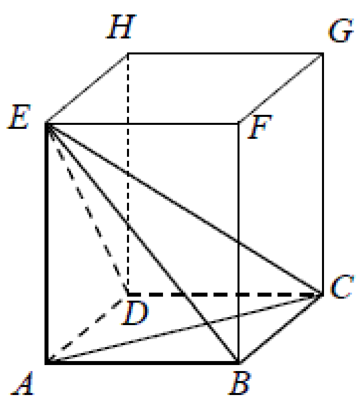
- Przyznajemy **0 punktów,** gdy zdający zapisze niepoprawny układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi (oba równania są błędne) i rozwiązując go otrzyma liczbę trzycyfrową.
- Przyznajemy **0 punktów,** gdy zdający zapisze niepoprawny układ trzech równań z trzema niewiadomymi (**dwa lub trzy równania są błędne**) i rozwiązując go otrzyma liczbę trzycyfrową.
- Przyznajemy **1 punkt gdy uczeń** poda jedynie odpowiedź, że wartość szukanej liczby to 678 i nie sprawdzi wszystkich warunków zadania.
- Przyznajemy **5 punktów gdy uczeń** poda poprawną odpowiedź, że szukana liczba to 678 i wykona sprawdzenie, że otrzymana liczba **spełnia wszystkie warunki zadania.**

Zadanie 25 (4p.)

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między przekątną graniastosłupa, a przekątną jego podstawy, wychodzącymi z jednego wierzchołka, jest równy 60°. Oblicz objętość tego graniastosłupa jeśli krawędź jego podstawy jest równa 6 cm.

Przykładowe rozwiązanie

Rysunek pomocniczy



1. $V = P_p \cdot H$,
2. Podstawą graniastosłupa jest kwadrat zatem, $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = 6cm$
3. $P_p = 6 \cdot 6\ cm^2 = 36\ cm^2, H = ?$
4. W trójkącie ACE $\sphericalangle ACE = 60^\circ$, $\sphericalangle CAE = 90^\circ$ i $\sphericalangle CEA = 30^\circ$,
5. Z zależności między bokami w trójkącie ACE, $H = |AE| = |AC| \cdot \sqrt{3}$,
6. $|AC| = |AB| \cdot \sqrt{2}$, ponieważ $|AC|$ jest przekątną kwadratu ABCD.
7. $|AC| = |AB| \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}\ cm$,
8. $H = |AE| = |AC| \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}\ cm = 6\sqrt{6}\ cm$,
9. $V = P_p \cdot H = 36\ cm^2 \cdot 6\sqrt{6}\ cm = 216\sqrt{6}\ cm^3$. Objętość graniastosłupa wynosi $216\sqrt{6}\ cm^3$.

Zasady oceniania: Uczeń otrzymuje

4 punkty –gdy poprawnie rozwiąże zadanie i zapisze, że objętość graniastosłupa jest równa $216\sqrt{6}\ cm^3$.

3 punkty – gdy

- poprawnie wyznaczy wysokość graniastosłupa $H = 6\sqrt{6}\ cm$ i pole powierzchni podstawy $P_p = 36\ cm^2$ i nie wyznaczy objętości graniastosłupa lub wyznaczając objętość graniastosłupa popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy wysokość graniastosłupa $H = 6\sqrt{6}\ cm$ i wyznaczając objętość ze wzoru $V = 6 \cdot 6 \cdot 6\sqrt{6}\ cm^3$ popełni błąd rachunkowy lub nie wyliczy objętości **lub**
- Popełnił błąd rachunkowy przy wyznaczaniu długość przekątnej podstawy (np. korzystał z twierdzenia Pitagorasa do wyznaczania długości przekątnej podstawy i błędnie rozwiązał równanie $6^2 + 6^2 = |AC|^2$ i z popełnionym błędem rachunkowym rozwiąże poprawnie zadanie do końca tj. wyznaczy poprawnie objętość graniastosłupa do źle wyznaczonej długości przekątnej podstawy **lub**
- Poprawnie wyznaczy długość przekątnej podstawy $|AC| = 6\sqrt{2}$ i zapisze np. $H = |AC| \cdot \sqrt{3}$ oraz wyznaczy z błędem rachunkowym wysokość graniastosłupa i do błędnie wyznaczonej wysokości poprawnie wyznaczy objętość.

2 punkty – gdy

- Poprawnie wyznaczy długość przekątnej podstawy $|AC| = 6\sqrt{2}$ i zapisze np. $H = |AC| \cdot \sqrt{3}$ i nie rozwiążę dalej zadania lub popełni błędy przy wyznaczaniu wysokości graniastosłupa i wyznaczaniu objętości **lub**
- Zapisze, dwie zależności np. :
  $|AC| = |AB|\sqrt{2}$ i $H = |AE| = |AC|\sqrt{3}$ i dalej nie rozwiąże zadania lub wyznaczy wysokość graniastosłupa i długość przekątnej z błędem rachunkowym **lub**
- Zapisze, dwie zależności np. :
  $|AC| = |AB|\sqrt{2}$ i $H = |AE| = |AC|\sqrt{3}$ i dalej nie rozwiąże zadania lub wyznaczy wysokość graniastosłupa i długość przekątnej z błędem **.**

1 punkt – gdy

- Poprawnie wyznaczy długość przekątnej podstawy $|AC| = 6\sqrt{2}$ i na tym zakończy lub wyznaczy wysokość graniastosłupa z błędnej zależności np.:
  $H = 2 \cdot |AC|$ lub $\mathrm{H} = \frac{|\mathrm{AC}|}{\sqrt{3}}$ lub $H = |AC|\sqrt{2}$ lub $\mathrm{H} = \frac{|\mathrm{AC}|}{\sqrt{2}}$ $\mathrm{H} = \frac{|\mathrm{AC}|}{2}$ **lub**
- Zapisze tylko jedną z zależności $|AC| = |AB|\sqrt{2}$ lub $H = |AE| = |AC|\sqrt{3}$ **lub**
- Zapisze, że $H = |AE| = |AC|\sqrt{3}$, ale wyznacza przekątną podstawy z błędnej zależności np.:

  $|AC| = 2 \cdot |AB|$ lub $|AC| = \frac{|\mathrm{AB}|}{\sqrt{3}}$ lub $|AC| = |AB|\sqrt{3}$ lub $|AC| = \frac{|\mathrm{AB}|}{\sqrt{2}}$ $|AC| = \frac{|\mathrm{AB}|}{2}$ **lub**

- Sporządzi rysunek pomocniczy i zaznaczy na nim kąt między przekątną podstawy i przekątną graniastosłupa i i na tym zakończy lub popełni błędy.

0 punktów – gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania .

Zadanie 26 (3p.)

Udowodnij, że suma 4 kolejnych liczb naturalnych podzielnych przez 3 jest liczbą podzielną przez 6.

Przykładowe rozwiązanie

Założenie: $3\mathrm{n}, 3\mathrm{n} + 3, 3\mathrm{n} + 6{,}3\mathrm{n} + 9$;

to cztery kolejne liczby naturalne podzielne przez 3 dla n należących do liczb naturalnych

Teza : $3\mathrm{n} + (3\mathrm{n} + 3) + (3\mathrm{n} + 6) + (3\mathrm{n} + 9) -$ liczba podzielna przez 6

Dowód:

$3\mathrm{n} + (3\mathrm{n} + 3) + (3\mathrm{n} + 6) + (3\mathrm{n} + 9) = 12\mathrm{n} + 18 = 6(2\mathrm{n} + 3)$,

Otrzymana liczba $6(2n + 3)$ jest podzielna przez 6 ponieważ jest iloczynem liczby 6 i pewnej liczby naturalnej 2n+3 co kończy dowód.

Zasady oceniania: Uczeń otrzymuje

3 punkty - gdy poprawnie uzasadni, że otrzymana suma jest podzielna przez 6.

Uwaga:

Uczeń nie musi wyłączać przed nawias czynnika 6 może wykonać dzielenie (12n +8) przez 6 i otrzymać wynik 2n+3.

2 punkty – gdy zapisze symbolicznie 4 kolejne liczby podzielne przez 3

np: $3\mathrm{n}, 3\mathrm{n} + 3, 3\mathrm{n} + 6{,}3\mathrm{n} + 9$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

1 punkt – gdy zapisze symboliczne przynajmniej jedną liczbę podzielną przez 3 np.

$3\mathrm{n}$ lub $3\mathrm{n} + 3$ lub$3\mathrm{n} + 6$ lub $3\mathrm{n} + 9$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

0 punktów - – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania, bądź dowód na konkretnym przykładzie.

Uwaga:

W rozwiązaniu zadania uczeń może pominąć zapis, że n jest liczbą naturalną.

Zadanie 27 (2p.)

Ze 150 kg solanki odparowało 60 kg wody i otrzymano roztwór o zawartości 5% soli. Oblicz ile procent soli zawierała solanka przed odparowaniem wody.

Przykładowe rozwiązanie

Zawartość soli w solance jest równa 5% z 90 kg $= 0{,}05 \cdot 90\ \text{kg} = 4{,}5\ \text{kg}$

$\frac{4{,}5\ kg}{150\ kg} \cdot 100\% = \frac{45}{15}\% = 3\%$

Solanka przed odparowaniem wody zawierała 3% soli.

Zasady oceniania: Uczeń otrzymuje

2 punkty – gdy poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy , że solanka przed odparowaniem wody zawierała 3% soli.

1 punkt – gdy wyznaczy zawartość soli w solance równą 4,5 kg i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Zadanie 28 (4p.)

Za pięć lat syn będzie trzy razy młodszy od ojca, a za dwadzieścia lat ojciec będzie dwa razy starszy od syna. Ile lat ma każdy z nich obecnie?

Przykładowe rozwiązanie:

$x - wiek\ syna\ obecnie,$
$y - wiek\ ojca\ obecnie,$
$x + 5 - \ wiek\ syna\ \ za\ pięć\ lat,$
$y + 5 - \ wiek\ ojca\ \ za\ pięć\ lat,$
$x + 20 - \ wiek\ syna\ \ za\ dwadzieścia\ lat,$
$y + 20 - \ wiek\ ojca\ \ za\ dwadzieścia\ lat.$

$$\begin{cases} 3(x+5) = y+5 \\ 2(x+20) = y+20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x+10 \\ 2x+40 = y+20 \end{cases}$$

$2x + 40 = (3x + 10) + 20$

$2x - 3x = -10$

$x = 10 \quad i \ y = 3x + 10$

$x = 10 \quad i \quad y = 40$.

Obecnie syn ma 10 lat, a ojciec 40 lat.

Zasady oceniania: Uczeń otrzymuje

4 punkty –

- gdy poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że obecnie syn ma 10 lat, a ojciec 40 lat **lub**
- gdy poda odpowiedź, że syn ma 10 lat, a ojciec 40 lat, ale sprawdzi, że otrzymane liczby spełniają wszystkie warunki zadania.

3 punkty – gdy

- rozwiązując układ równań poprawnie wyznaczy wiek ojca i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- rozwiązując układ równań poprawnie wyznaczy wiek syna i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

2 punkty – gdy

- otrzyma poprawne równanie z jedną niewiadomą np.:
  $2x + 40 = (3x + 10) + 20$ lub $3 \cdot \left(\frac{1}{2}y - 10\right) + 15 = y + 5$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

1 punkt - gdy

- poprawnie ułoży układ równań i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poda tylko odpowiedź, że syn ma 10 lat, a ojciec 40 lat bez żadnego sprawdzenia warunków zadania i bez zapisywania układu równań lub równania.

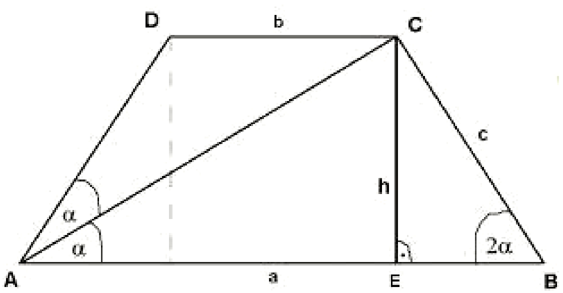
0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Zadanie 29 (5p.)

W trapezie równoramiennym, przekątna trapezu dzieli kąt przy dłuższej podstawie na dwie równe części. Wyznacz miarę kąta ostrego tego trapezu, jeśli stosunek długości podstaw trapezu wynosi 1:2.

<u>*Przykładowe rozwiązanie*</u>

Rysunek pomocniczy:



Wprowadźmy oznaczenia, ABCD to trapez równoramienny o podstawach $|AB| = a\ i\ |CD| = b$ i ramionach $|BC| = |AD| = c$.

1. $|AB| = 2 \cdot |CD|$, jeśli $|AB| = a\ i\ |CD| = b$ to $a = 2b$
2. Zauważmy, że $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD\ i\ \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD = 2 \cdot \sphericalangle BAC$.
3. Niech $\sphericalangle BAC = \alpha$, zatem $\sphericalangle ABC = 2 \cdot \alpha$.
4. Zauważmy, że $AB \parallel CD$ zatem $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD = \alpha$, ponieważ są to kąty naprzemianległe.
5. Skoro $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD = \alpha$ to trójkąt ADC jest równoramienny, o podstawie AC, zatem $|AD| = |CD| = b$, czyli $|AD| = |BC| = b$. Zatem $c = b$.
6. Przez CE oznaczmy wysokość trapezu, zatem $|EB| = \frac{|AB|-|CD|}{2} = \frac{2b-b}{2} = \frac{b}{2}$.
7. Trójkąt EBC jest prostokątny, w którym przeciwprostokątna CB jest dwa razy dłuższa niż przyprostokątna EB, z czego wynika, że $\sphericalangle ECB = 30^\circ$, a $\sphericalangle EBC = 60^\circ$,
8. Kąt ostry tego trapezu to 60°.

Zasady oceniania: Uczeń otrzymuje

5 punktów – gdy poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że kąt ostry tego trapezu to 60°,

4 punkty – gdy wyznaczy miarę kąta $\sphericalangle ECB = 30^\circ$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy,

3 punkty – gdy

- wyznaczy długości przynajmniej dwóch boków w trójkącie prostokątnym EBC np.

$|EB| = \frac{|AB|-|CD|}{2} = \frac{2b-b}{2} = \frac{b}{2}\ i\ |BC| = b$ lub $|EB| = \frac{|AB|-|CD|}{2} = \frac{2b-b}{2} = \frac{b}{2}\ i\ |BC| = b\ \ lub$

$|BC| = b\ i\ |BC| = b$, przy wcześniejszym pokazaniu, że $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD = \alpha$ oraz, że trójkąt ADC jest równoramienny i zapisaniu, że $|AD| = |BC|$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy przy wyznaczaniu kątów trójkąta EBC **lub**

- poprawnie wyznaczy, że kąt ostry tego trapezu to 60°, ale nie uzasadni dlaczego $|AD| = |CD|$

2 punkty – gdy zauważy, że $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD = \alpha$ oraz, że trójkąt ADC jest równoramienny i zapisze, że $|AD| = |BC|$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

1 punkt – gdy

- zauważy, że $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD = \alpha$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, że $|AD| = |CD|$ bez uzasadnienia, że trójkąt ADC jest równoramienny i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- gdy poda, że kąt ostry tego trapezu to 60° bez żadnego przedstawionego rozumowania.

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Uwaga Akceptujemy rozwiązanie przeprowadzone na rysunku. Wystarczy, że uczeń poprawnie zaznaczy na rysunku odpowiednie kąty, zapisze na rysunku długości poszczególnych odcinków i poda rozwiązanie.

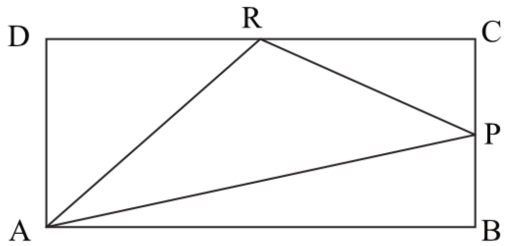
Zadanie 30 (4p.)

W prostokącie $ABCD$ (rysunek) punkt P jest środkiem boku BC, a punkt R jest środkiem boku CD. Wykaż, że $P_{\Delta APR} = P_{\Delta ADR} + P_{\Delta PCR}$, gdzie

$P_{\Delta APR}$ oznacza pole trójkąta APR,

$P_{\Delta ADR}$ oznacza pole trójkąta ADR,

$P_{\Delta PCR}$ oznacza pole trójkąta PCR.



Przykładowe rozwiązanie

1. Oznaczmy przez $a\ i\ b$ długości boków prostokąta

$|AB| = |CD| = a\ i\ |BC| = |AD| = b$

Zatem: $|BP| = |PC| = \frac{1}{2}b \quad i \quad |CR| = |RD| = \frac{1}{2}a$

2. Obliczenie pól trójkątów ADR, PCR oraz ABP, a także prostokąta ABCD.

$$P_{\Delta ADR} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot b = \frac{1}{4}ab$$

$$P_{\Delta ABP} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2}b = \frac{1}{4}ab$$

$$P_{\Delta PCR} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b = \frac{1}{8}ab$$

$$P_{ABCD} = ab$$

3. Obliczenie pola trójkąta APR.

$$P_{\Delta APR} = P_{ABCD} - P_{\Delta ADR} - P_{\Delta ABP} - P_{\Delta PCR} = ab - \frac{1}{4}ab - \frac{1}{4}ab - \frac{1}{8}ab$$

$$P_{\Delta APR} = ab - \frac{2}{8}ab - \frac{2}{8}ab - \frac{1}{8}ab = \frac{3}{8}ab$$

4.Wyznaczenie sumy pól trójkątów ADR oraz PCR i zakończenie dowodu.

$P_{\Delta ADR} + P_{\Delta PCR} = \frac{1}{4}ab + \frac{1}{8}ab = \frac{2}{8}ab + \frac{1}{8}ab = \frac{3}{8}ab$
$P_{\Delta APR} = \frac{3}{8}ab$ i $P_{\Delta ADR} + P_{\Delta PCR} = \frac{3}{8}ab$

Zatem $P_{\Delta APR} = P_{\Delta ADR} + P_{\Delta PCR}$, a to kończy dowód.

Zasady oceniania: Uczeń otrzymuje

4 punkty – gdy poprawnie przeprowadzi dowód, że $P_{\Delta APR} = P_{\Delta ADR} + P_{\Delta PCR}$,

3 punkty – gdy

- wyznaczy poprawnie $P_{\Delta APR} = \frac{3}{8}ab$ i na tym zakończy **lub**
- wyznaczy poprawnie $P_{\Delta APR} = \frac{3}{8}ab$ i błędnie wyznaczy sumę pól trójkątów ADR oraz PCR **lub**
- wyznaczy poprawnie pola trójkątów ADR , PCR , ABP oraz poprawnie $P_{\Delta ADR} + P_{\Delta PCR} = \frac{3}{8}ab$, ale w wyniku błędu rachunkowego otrzyma $P_{\Delta APR} \neq \frac{3}{8}ab$.

2 punkty – gdy

- wyznaczy pola trójkątów $P_{\Delta ADR} = \frac{1}{4}ab$ i $P_{\Delta PCR} = \frac{1}{8}ab$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- wyznaczy pola trójkątów $P_{\Delta ABP} = \frac{1}{4}ab$ i $P_{\Delta BCR} = \frac{1}{8}ab$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- wyznaczy pola trójkątów $P_{\Delta ABP} = \frac{1}{4}ab$ i $P_{\Delta ADR} = \frac{1}{4}ab$ i zapisze, że pole $P_{\Delta APR} = P_{ABCD} - P_{\Delta ADR} - P_{\Delta ABP} - P_{\Delta PCR}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

1 punkt – gdy

- wyznaczy poprawnie **tylko jedno** z pól trójkątów ADR , PCR , ABP
  $P_{\Delta ADR} = \frac{1}{4}ab$ *lub* $P_{\Delta ABP} = \frac{1}{4}ab$ *lub* $P_{\Delta BCR} = \frac{1}{8}ab$ **lub**
- zapisze, że $P_{\Delta APR} = P_{ABCD} - P_{\Delta ADR} - P_{\Delta ABP} - P_{\Delta BCR}$.

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Uwaga:

1. Jeśli uczeń przyjmie konkretne wartości za boki prostokąta i przeprowadzi dowód na konkretnym przykładzie to otrzymuje **1p**, **(** punkt jest przyznany za zapisanie bądź skorzystanie z własności , że $P_{\Delta APR} = P_{ABCD} - P_{\Delta ADR} - P_{\Delta ABP} - P_{\Delta BCR}$).
2. Uczeń nie musi wyraźnie zapisać, że $P_{\Delta APR} = P_{ABCD} - P_{\Delta ADR} - P_{\Delta ABP} - P_{\Delta BCR}$ wystarczy, że obliczając trójkąta APR widzimy, że jest ono różnicą pola prostokąta $ABCD$ i sumy pól trójkątów ADR , PCR , ABP.

Kod ucznia | | | | |

Data urodzenia ucznia | | | | | | | | |

Dzień **Miesiąc** **Rok**

Wojewódzki Konkurs Matematyczny

dla uczniów szkół podstawowych województwa wielkopolskiego

STOPIEŃ WOJEWÓDZKI rok szkolny 2019/2020

Instrukcja dla ucznia

1. Sprawdź, czy test zawiera **17 stron**. Ewentualny brak stron lub inne usterki zgłoś Komisji przed rozpoczęciem konkursu.
2. Czytaj uważnie wszystkie teksty i zadania. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra piszącego czarnym lub niebieskim kolorem. Nie używaj korektora.
3. Test, do którego przystępujesz, zawiera **26 zadań.** Wśród nich są zadania zamknięte i zadania otwarte wymagające krótszej lub dłuższej odpowiedzi.
   Zadania zamknięte to zadania od 1 do 15.
4. W każdym **zadaniu zamkniętym** wybierz tylko **jedną odpowiedź** i zamaluj długopisem/piórem odpowiednią kratkę na karcie odpowiedzi, np. gdy wybrałeś odpowiedź „A”:

A	B	C	D

Jeśli się pomylisz, błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz inną odpowiedź, np.:

A	B	C	D

Za każdą poprawnie udzieloną odpowiedź otrzymasz jeden punkt, a za odpowiedzi błędne lub brak odpowiedzi – zero punktów.

5. W zadaniach **otwartych** zapisz rozwiązania starannie i czytelnie w miejscach wyznaczonych przy poszczególnych zadaniach. Pamiętaj, że pominięcie uzasadnienia lub części obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów. Pomyłki przekreślaj (nie stosuj korektora)
6. Rozwiązując zadania, możesz korzystać z przyborów geometrycznych (linijki i cyrkla) oraz ze strony oznaczonej jako **brudnopis**. Zapisy w brudnopisie nie będą sprawdzane i oceniane.
7. Podczas trwania konkursu nie możesz korzystać z żadnych pomocy naukowych (w tym również kalkulatora i urządzeń elektronicznych) i podpowiedzi kolegów – narażasz ich i siebie na dyskwalifikację. Nie wolno Ci również zwracać się z jakimikolwiek wątpliwościami do członków Komisji.
8. Na udzielenie odpowiedzi masz **90 minut.**

Życzymy Ci powodzenia!

Wypełnia Komisja (po rozkodowaniu prac)

……………………………………………………………………………………. **Uczeń uzyskał: ……….. /50 pkt.**

Imię i nazwisko ucznia

Zadanie 1 (1p.)

W samochodzie znajduje się kierowca i trzech pasażerów. Średnia wieku wszystkich czterech osób wynosi 22 lata. Średnia wieku trójki pasażerów wynosi 20 lat. Zatem kierowca ma:

A. 24 lata B. 28 lat C. 25 lat D. 26 lat

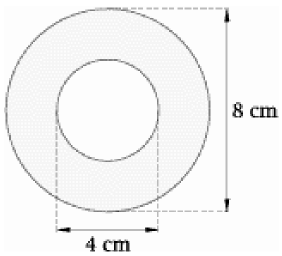
Zadanie 2 (1p.)

Miara kąta wewnętrznego dziesięciokąta foremnego jest równa:

A. 146° B. 144° C. 136° D. 154°

Zadanie 3 (1p.)

Pole pierścienia kołowego przedstawionego na rysunku poniżej jest równe:



A. $48\pi\ cm^2$ B. $8\pi\ cm^2$ C. $4\pi\ cm^2$ D. $12\pi\ cm^2$

Zadanie 4 (1p.)

Ile liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach można utworzyć z cyfr należących do zbioru $\{0,1,2,3,4\}$?

A. 48 B. 120 C. 24 D. 96

Zadanie 5 (1p.)

O godzinie 9:20 wskazówki zegara tworzą kąt.

A. 190° B. 195° C. 200° D. 210°

Zadanie 6 (1p.)

Na loterię przygotowano 25 losów, wśród których jest 8 wygrywających. Pierwsza z losujących osób wyciągnęła los bez wygranej. Prawdopodobieństwo, że następna osoba wyciągnie los wygrywający wynosi:

A. $\frac{8}{17}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{8}{25}$ D. $\frac{1}{3}$

Brudnopis

Zadanie 7 (1p.)

Punkty $A=(-2,3)$ i $B=(1,-1)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC. Długość boku tego trójkąta wynosi:

A. $\sqrt{13}$ B. $\sqrt{5}$ C. 5 D. $\sqrt{17}$

Zadanie 8 (1p.)

Punkt $S=(3,-4)$ jest środkiem odcinka AB. Wiadomo, że punkt $A\ =(-5,2)$.

Jeśli punkt $B=(\ x,y)$ to

A. $x+y=1$ B. $x+y=-1$ C. $x+y=-2$ D. $x+y=-19$

Zadanie 9 (1p.)

Państwo Kowalscy mają dzieci, każdy z synów państwa Kowalskich ma dwóch braci i jedną siostrę. Liczba dzieci w tej rodzinie wynosi:

A. 3 B. 5 C. 4 D. 6

Zadanie 10 (1p.)

Obwód koła o polu 16π wynosi

A. $4\,\pi$ B. 16π C. 64π D. 8π

Zadanie 11 (1p.)

Z wierzchołka kąta rozwartego równoległoboku poprowadzono dwie różne wysokości, które utworzyły kąt 36°. Kąt ostry tego równoległoboku ma miarę

A. 68° B. 42° C. 54° D. 36°

Zadanie 12 (1p.)

Pracownik pracując po 6 godzin dziennie wykonał pewną pracę w ciągu 32 dni. Pracując po 8 godzin dziennie tę samą pracę wykonałby w ciągu

A. 16 dni B. 24 dni C. 26 dni D. 28 dni

Zadanie 13 (1p.)

Droga z Rzeszowa do Radomia zaznaczona na mapie wykonanej w skali $1{:}\,250000$ ma długość $80\ cm$. Długość tej trasy w rzeczywistości wynosi:

A. $200\ km$ B. $240\ km$ C. $180\ km$ D. $160\ km$

Brudnopis

Zadanie 14 (1p.)

Ślimak wspina się po pniu na drzewo. Codziennie pokonuje 6 metrów do góry, ale w nocy obsuwa się o 4 metry w dół. Drzewo ma 10 metrów wysokości. Po ilu dniach ślimak dotrze na wierzchołek drzewa?

A. 3 dniach B. 5 dniach C. 4 dniach D. inna odpowiedź

Zadanie 15 (1p.)

Wyrażenie $-2\frac{2}{5}x + 1\frac{1}{3}$ przyjmuje wartości dodatnie tylko wtedy, gdy:

A. $x > \frac{5}{9}$ B. $x < \frac{5}{9}$ C. $x < -\frac{5}{9}$ D. $x < \frac{16}{15}$

Brudnopis

Zadanie otwarte

Zadanie 16 (3p.)

Dane jest przybliżenie $\sqrt{600} \approx 24,5$. Wykorzystując podane przybliżenie wyznacz przybliżone wartości $\sqrt{54}$ i $\sqrt{150}$ z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Zadanie 17 (2p.)

Dana jest liczba $x = 999^{101} + 999^{100}$. Wyznacz cyfrę jedności liczby x.

Zadanie 18 (3p.)

Udowodnij, że jeśli do iloczynu dwóch liczb całkowitych, których różnica wynosi 10, dodamy 25, to otrzymamy liczbę będącą kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 19 (4p.)

Rowerzysta pokonał trasę z prędkością $30\ km/h$, po dojechaniu do celu natychmiast zawrócił, z powrotem jechał tą samą trasą z prędkością $20\ km/h$. Oblicz, z jaką średnią prędkością rowerzysta pokonał całą drogę.

Zadanie 20 (4p.)

Drewnianą sześcienną kostkę o długości krawędzi $4\ cm$ pomalowano na zielono i następnie rozcięto na 64 sześciany o długości krawędzi równej $1cm$.

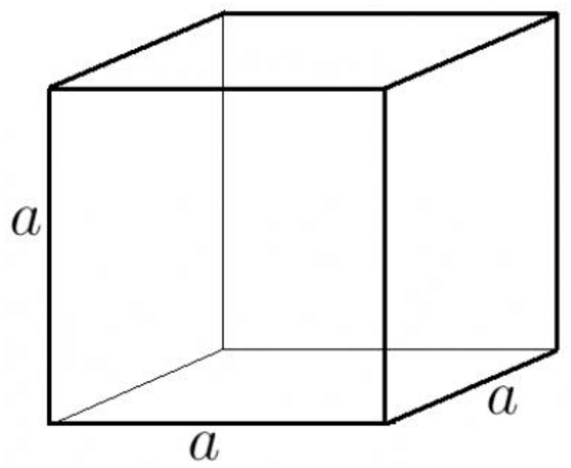
Uzupełnij poniższe zdania wstawiając liczby tak, aby uzyskać zdania prawdziwe:

1. Liczba sześcianów z trzema ścianami pomalowanymi na zielono jest równa: **……..**

2. Liczba sześcianów z dwoma ścianami pomalowanymi na zielono jest równa:**……..**

3.Liczba sześcianów, których jedna lub dwie ściany są pomalowane na zielono jest równa:**………..**

4. Liczba sześcianów, których żadna ściana nie jest pomalowana na zielono jest równa:**………..**

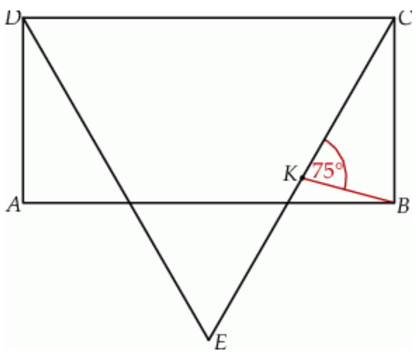


Zadanie 21 (2p.)

W naczyniu było $200\ g$ roztworu cukru o stężeniu 25%. Do roztworu dosypano taką samą ilość cukru, jaka była na początku w roztworze. Oblicz, jakie stężenie procentowe ma otrzymany roztwór.

Zadanie 22 (3p.)

W prostokącie $ABCD$ przedstawionym na rysunku bok AB jest dwa razy dłuższy niż bok BC. Punkt E jest takim punktem, że trójkąt DCE jest równoboczny, zaś punkt K jest środkiem boku CE tego trójkąta. Wykaż, że $\sphericalangle BKC = 75^\circ$.



Zadanie 23 (3p.)

Do ponumerowania stron pewnej książki wykorzystano 339 cyfr. Wyznacz, ile stron ma ta książka.

Zadanie 24 (2p.)

Na półce stoi kolejno 6 tomów „Trylogii”: 2 tomy „ Ogniem i mieczem”, 3 tomy „Potopu” i „Pan Wołodyjowski”. Wszystkie tomy są ustawione jeden za drugim, brzegiem książki do osoby stojącej przed półką, żaden z tomów nie stoi do góry nogami (rysunek). Kornik książkowy przegryza jedną tekturową okładkę przez dwie godziny, a wszystkie kartki dowolnego tomu przez godzinę. Startuje od pierwszej strony pierwszego tomu „Ogniem i mieczem”. Po jakim czasie dotrze do ostatniej strony „Pana Wołodyjowskiego”.

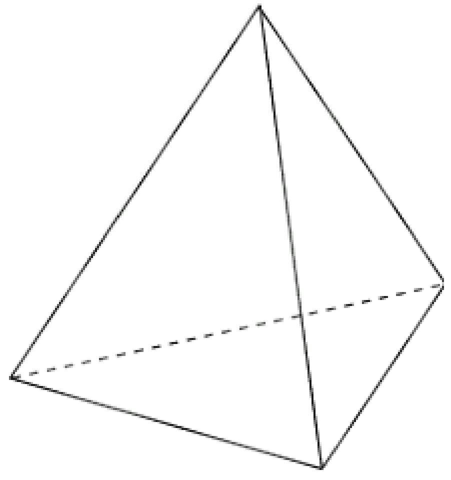
Henryk Sienkiewicz **Ogniem i mieczem Tom I**	Henryk Sienkiewicz **Ogniem i mieczem Tom II**	Henryk Sienkiewicz **Potop Tom I**	Henryk Sienkiewicz **Potop Tom II**	Henryk Sienkiewicz **Potop Tom III**	Henryk Sienkiewicz **Pan Wołodyjowski**

Zadanie 25 (4p.)

W sklepie są wafle po $8\ zł$ i po $12\ zł$ za kilogram. Sprzedawca chce zrobić mieszankę tych wafli po $11\ zł$ za kilogram. Ile wafli każdego rodzaju powinien zmieszać, aby otrzymać $20\ kg$ mieszanki?

Zadanie 26 (5p.)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź boczna ma długość $8\ cm$. Wyznacz objętość tego ostrosłupa jeśli krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°.



Brudnopis

Brudnopis

Karta odpowiedzi do zadań zamkniętych

Kod ucznia

Data urodzenia ucznia

Dzień **Miesiąc** **Rok**

Numer zadania	**Odpowiedzi**	Liczba punktów
1.	A B C D	
2.	A B C D	
3.	A B C D	
4.	A B C D	
5.	A B C D	
6.	A B C D	
7.	A B C D	
8.	A B C D	
9.	A B C D	
10.	A B C D	
11.	A B C D	
12.	A B C D	
13.	A B C D	
14.	A B C D	
15.	A B C D	

Wypełnia komisja

Suma punktów za zadania zamknięte

Suma punktów za zadania otwarte

Wojewódzki Konkurs Matematyczny

dla uczniów szkół podstawowych województwa wielkopolskiego

STOPIEŃ WOJEWÓDZKI rok szkolny 2019/2020

Klucz punktowania zadań zamkniętych i zasady oceniania zadań otwartych

1. **Klucz punktowania zadań zamkniętych.**
   Za każdą poprawną odpowiedź uczeń otrzymuje 1 punkt.

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Poprawna odpowiedź	B	B	D	A	C	D	C	A	C	D	D	B	A	A	B

2. **Przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych.**

Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania nieuwzględnione w schemacie punktowania przyznajemy maksymalną liczbę punktów należnych za to zadanie.

UWAGA : Nie jest wymagana od ucznia na końcu zadania wyraźnie sformułowana odpowiedź słowna wystarczy, że uczeń wyznaczy, obliczy szukaną wartość, bądź przeprowadzi argumentację w zadaniu na dowodzenie.

Zadanie 16 (3p.)

Dane jest przybliżenie $\sqrt{600} \approx 24,5$. Wykorzystując podane przybliżenie wyznacz przybliżone wartości $\sqrt{54}$ i $\sqrt{150}$ z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Przykładowe rozwiązanie

I Sposób

1. $\sqrt{600} \approx 24,5$

$\sqrt{600} = \sqrt{100 \cdot 6} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{6} = 10\sqrt{6}$

$10\sqrt{6} \approx 24,5 \ czyli \ \sqrt{6} \approx 2,45$

2. $\sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{6} \approx 3 \cdot 2,45 \quad zatem \ \sqrt{54} \approx 7,35.$

3. $\sqrt{150} = \sqrt{25 \cdot 6} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{6} = 5\sqrt{6} \approx 5 \cdot 2,45 \quad zatem \ \sqrt{150} \approx 12,25.$

II Sposób

1. $\sqrt{54} = \sqrt{600 \cdot \frac{9}{100}} = \sqrt{600} \cdot \sqrt{\frac{9}{100}} \approx 24{,}5 \cdot \frac{3}{10}\, zatem\ \sqrt{54} \approx 7{,}35$

2. $\sqrt{150} = \sqrt{\frac{600}{4}} = \frac{\sqrt{600}}{\sqrt{4}} \approx \frac{24{,}5}{2} \quad zatem\ \sqrt{150} \approx 12{,}25$

Zasady oceniania: Uczeń otrzymuje

3 punkty - gdy poprawnie rozwiąże zadanie i zapisze, że $\sqrt{54} \approx 7{,}35\ i\ \sqrt{150} \approx 12{,}25$.

2 punkty – gdy

- poprawnie poda, że $\sqrt{54} \approx 7{,}35$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie poda, że $\sqrt{150} \approx 12{,}25$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, że $\sqrt{54} = \sqrt{600} \cdot \frac{3}{10}$ **i** $\sqrt{150} = \frac{\sqrt{600}}{2}$
  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, że $\sqrt{600} = 10\sqrt{6}$ i przynajmniej jedno z równań
  $\sqrt{150} = 5\sqrt{6}$ lub $\sqrt{54} = 3\sqrt{6}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

1 punkt – gdy

- poprawnie poda przybliżenie $\sqrt{6} \approx 2{,}45$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, że $\sqrt{54} = \sqrt{600} \cdot \frac{3}{10}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, że $\sqrt{150} = \frac{\sqrt{600}}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, przynajmniej jedno z równań
  $\sqrt{150} = 5\sqrt{6}$ lub $\sqrt{54} = 3\sqrt{6}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, że $\sqrt{600} = 10\sqrt{6}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

0 punktów – gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania.

Uwaga !!!

- Przyznajemy **3 punkty,** gdy zdający zapisze poprawnie wartości obu przybliżeń nie przedstawiając obliczeń.
- Przyznajemy **2 punkty,** gdy zdający zapisze poprawnie wartość jednego z przybliżeń nie przedstawiając obliczeń.

Zadanie 17 (2p.)

Dana jest liczba $x = 999^{101} + 999^{100}$. Wyznacz cyfrę jedności liczby x.

<u>*Przykładowe rozwiązanie*</u>

$x = 999^{101} + 999^{100} = 999^{100} \cdot (999 + 1) = 999^{100} \cdot 100$

Cyfra jedności liczby x jest równa 0.

Zasady oceniania: Uczeń otrzymuje

2 punkty – gdy poprawnie rozwiąże zadanie i zapisze, że cyfra jedności liczby x jest równa 0.

1 punkt – gdy

- zapisze, że $x = 999^{100} \cdot (999 + 1)$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, że $x = 999^{100} \cdot 100$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poda tylko, że cyfra jedności liczby x jest równa 0 nie przedstawiając żadnego toku rozumowania.

0 punktów – gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania .

Zadanie 18 (3p.)

Udowodnij, że jeśli do iloczynu dwóch liczb całkowitych, których różnica wynosi 10, dodamy 25, to otrzymamy liczbę będącą kwadratem liczby całkowitej.

Przykładowe rozwiązanie

I sposób

Założenie: a i b to liczby całkowite, o których wiadomo, że $a - b = 10,$

Teza: $a \cdot b + 25$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Dowód:

Jeśli $a - b = 10\ to\ a = 10 + b$, zatem

$a \cdot b + 25 = (10 + b) \cdot b + 25 = 10b + b^2 + 25 = b^2 + 10b + 25 = (b + 5)^2$

Jeśli b jest liczbą całkowitą to $b + 5$ też jest liczbą całkowitą, zatem otrzymana liczba $(b + 5)^2$jest kwadratem liczby całkowitej co kończy dowód.

II sposób

Założenie: a i a $+ 10$ to liczby całkowite, o których wiadomo, że różnią się o 10.

Teza: $a \cdot (a + 10) + 25$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Dowód:

$a \cdot (a + 10) + 25 = a^2 + 10a + 25 = (a + 5)^2$

Jeśli a jest liczbą całkowitą to $a + 5$ też jest liczbą całkowitą, zatem otrzymana liczba $(a + 5)^2$jest kwadratem liczby całkowitej co kończy dowód.

III sposób

Założenie: a i a $- 10$ to liczby całkowite, o których wiadomo, że różnią się o 10.

Teza: $a \cdot (a - 10) + 25$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Dowód:

$a \cdot (a-10) + 25 = a^2 - 10a + 25 = (a-5)^2$

Jeśli a jest liczbą całkowitą to $a-5$ też jest liczbą całkowitą, zatem otrzymana liczba $(a-5)^2$jest kwadratem liczby całkowitej co kończy dowód.

Zasady oceniania: Uczeń otrzymuje

3 punkty - gdy poprawnie uzasadni, że otrzymana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.

Uwaga!!!

Uczeń nie musi komentować, że liczba postaci $a-5\ lub\ a+5$ jest całkowitą. Wystarczy, że zwinie daną liczbę do kwadratu sumy lub różnicy.

2 punkty – gdy

- zapisze wyrażenie zależne od jednej zmiennej np. $a \cdot (a+10) + 25 = a^2 + 10a + 25$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze wyrażenie zależne od jednej zmiennej np. $a \cdot (a-10) + 25 = a^2 + 10a + 25$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**

1 punkt – gdy

- zapisze wyrażenie zależne od jednej zmiennej np. $a \cdot (a+10) + 25$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze wyrażenie zależne od jednej zmiennej np. $a \cdot (a-10) + 25$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze równanie $a-b=10$ i zapisze wyrażenie $a \cdot b + 25$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze równanie $a=b-10$ i zapisze wyrażenie $a \cdot b + 25$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze równanie $a=b+10$ i zapisze wyrażenie $a \cdot b + 25$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**

0 punktów – gdy rozwiązanie jest błędne, jest brak rozwiązania, bądź dowód na konkretnym przykładzie.

Uwaga !!! W rozwiązaniu zadania uczeń może pominąć zapis, że liczby a i b są całkowite.

Zadanie 19 (4p.)

Rowerzysta pokonał trasę z prędkością $30\ km/h$, po dojechaniu do celu natychmiast zawrócił, z powrotem jechał tą samą trasą z prędkością $20\ km/h$. Oblicz, z jaką średnią prędkością rowerzysta pokonał całą drogę.

Przykładowe rozwiązanie

$30\frac{km}{h} - \ prędkość\ w\ pierwszą\ stronę$

$20\frac{km}{h} - prędkość\ w\ drodze\ powrotnej$

$V_{średnia} = \frac{całkowita\ droga}{całkowity\ czas}$

$30\frac{km}{h} = \frac{s_1}{t_1}$, $\quad$ *gdzie* $s_1 -$ *droga w pierwszą stronę i* $t_1 -$ *czas w pierwszą stronę,*

$20\frac{km}{h} = \frac{s_2}{t_1}$ *, gdzie* $s_2 -$ *droga z powrotem i* $t_2 -$ *czas w drodze powrotnej*

Skoro droga w obie strony była taka sama to $s_1 = s_2 = s$

Zatem

$$V_{średnia} = \frac{całkowita\ droga}{całkowity\ czas} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_1} = \frac{s + s}{t_1 + t_1} = \frac{2s}{t_1 + t_1}$$

$30\frac{km}{h} = \frac{s_1}{t_1} = \frac{s}{t_1}$ *Zatem* $t_1 = \frac{s}{30}$

$20\frac{km}{h} = \frac{s_2}{t_2} = \frac{s}{t_2}$ *Zatem* $t_2 = \frac{s}{20}$

$$V_{średnia} = \frac{2s}{t_1+t_1} = \frac{2s}{\frac{s}{30}+\frac{s}{20}} = \frac{2s}{\frac{2s}{60}+\frac{3s}{60}} = \frac{2s}{\frac{5s}{60}} = \frac{2s}{\frac{s}{12}} = \frac{24s}{s} = 24\frac{km}{h}$$

Średnia prędkość rowerzysty na całej trasie wynosiła 24$\frac{km}{h}$.

Zasady oceniania: Uczeń otrzymuje

4 punkty – gdy poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że średnia prędkość rowerzysty na całej trasie wynosiła *24*$\frac{km}{h}$.

3 punkty – gdy

- zapisze, że $V_{średnia} = \frac{2s}{\frac{s}{30}+\frac{s}{20}}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, że $V_{średnia} = \frac{2s}{t_1+t_1}$ $t_1 = \frac{s}{30}$ i $t_2 = \frac{s}{20}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

2 punkty – gdy

- zapisze, że $V_{średnia} = \frac{s_1+s_2}{t_1+t_1}$ i zapisze, że $30\frac{km}{h} = \frac{s_1}{t_1}$ i $20\frac{km}{h} = \frac{s_2}{t_2}$ i $s_1 = s_2$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, że $V_{średnia} = \frac{2s}{t_1+t_1}$ i zapisze $30\frac{km}{h} = \frac{s}{t_1}$ i $20\frac{km}{h} = \frac{s}{t_2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

1 punkt – gdy

- zapisze, że $30\frac{km}{h} = \frac{s_1}{t_1}$ i $20\frac{km}{h} = \frac{s_2}{t_2}$ i $s_1 = s_2$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, że $30\frac{km}{h} = \frac{s}{t_1}$ i $20\frac{km}{h} = \frac{s}{t_2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- *zapisze, że* $V_{średnia} = \frac{2s}{t_1+t_1}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- *zapisze*, że $V_{średnia} = \frac{s_1+s_2}{t_1+t_1}$ i $s_1 = s_2$.

0 punktów – gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania.

Uwaga!!!

- Jeśli uczeń rozwiązując zadanie przyjął na początku rozwiązania jakąś konkretną wartość drogi w jedną stronę np. 10 km i rozwiąże zadanie do końca poprawnie i otrzyma wynik średniej prędkości równy 24 km/h to otrzymuje **3 punkty.**
- Jeśli uczeń rozwiązując zadanie przyjął na początku rozwiązania jakąś konkretną wartość drogi w jedną stronę np. 10 km i stosuje dobre wzory na prędkość, drogę i czas, ale rozwiąże zadanie do końca z jednym błędem rachunkowym to otrzymuje **2 punkty.**
- Jeśli uczeń rozwiązując zadanie przyjął na początku rozwiązania jakąś konkretną wartość drogi w jedną stronę np. 10 km i stosuje dobre wzory na prędkość, drogę i czas, ale rozwiąże zadanie do końca z więcej niż jednym błędem rachunkowym to otrzymuje **1 punkt.**
- Jeśli uczeń rozwiązując zadanie przyjął na początku rozwiązania jakąś konkretną wartość drogi w jedną stronę np. 10 km i stosuje złe wzory na prędkość lub drogę lub czas, to otrzymuje **0 punktów.**

Zadanie 20 (4p.)

Drewnianą sześcienną kostkę o długości krawędzi 4 cm pomalowano na zielono i następnie rozcięto na 64 sześciany o długości krawędzi równej $1cm$.

Uzupełnij poniższe zdania wstawiając liczby tak, aby uzyskać zdania prawdziwe:

1. Liczba sześcianów z trzema ścianami pomalowanymi na zielono jest równa: **……..**

2. Liczba sześcianów z dwoma ścianami pomalowanymi na zielono jest równa:**……..**

3.Liczba sześcianów, których jedna lub dwie ściany są pomalowane na zielono jest równa:**………..**

4. Liczba sześcianów, których żadna ściana nie jest pomalowana na zielono jest równa:**………..**

Rozwiązanie

1. Liczba sześcianów z trzema ścianami pomalowanymi na zielono jest równa: **8**

2. Liczba sześcianów z dwoma ścianami pomalowanymi na zielono jest równa: **24**

3.Liczba sześcianów, których jedna lub dwie ściany są pomalowane na zielono jest równa:**48**

4. Liczba sześcianów, których żadna ściana nie jest pomalowana na zielono jest równa: **8.**

Zasady oceniania: Uczeń otrzymuje

4 punkty – gdy wszystkie 4 odpowiedzi są poprawne,

3 punkty – gdy 3 odpowiedzi są poprawne i jedna jest błędna lub jest jej brak,

2 punkty – gdy 2 odpowiedzi są poprawne, a pozostałe są błędne lub jest ich brak,

1 punkt – gdy 1 odpowiedź jest poprawna, a pozostałe są błędne lub jest ich brak,

0 punktów – gdy wszystkie odpowiedzi są błędne lub jest ich brak.

Zadanie 21 (2p.)

W naczyniu było $200\ g$ roztworu cukru o stężeniu 25%. Do roztworu dosypano taką samą ilość cukru, jaka była na początku w roztworze. Oblicz, jakie stężenie procentowe ma otrzymany roztwór.

Przykładowe rozwiązanie

Ilość cukru w roztworze o masie 200 g jest równa $25\% \cdot 200\ g = \frac{25}{100} 200\ g = 50g$

Masa całkowita roztworu po dodaniu cukru wynosi:250 g

Masa cukru w nowym roztworze wynosi $100\ g$

Stężenie procentowe $\frac{100\ g}{250\ g}$·100% = 40%

Stężenie procentowe otrzymanego roztworu cukru wynosi 40%.

Zasady oceniania: Uczeń otrzymuje

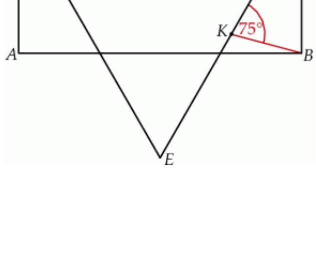
2 punkty – gdy poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że stężenie procentowe otrzymanego roztworu cukru wynosi 40%.

1 punkt – gdy
- wyznaczy, że ilość cukru w roztworze o masie 200 g jest równa $50g$ i zapisze ze nowy roztwór ma masę 250 g i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze wzór na stężenie procentowe nowego roztworu $\frac{100\ g}{250\ g}$·100% i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze wzór na stężenie procentowe nowego roztworu $\frac{m_s}{m_r} \cdot 100\%$ i zapisze, że $m_s = 100\ g$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze wzór na stężenie procentowe nowego roztworu $\frac{m_s}{m_r} \cdot 100\%$ i zapisze, że $m_r = 250\ g$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- wyznaczy, że ilość cukru w nowym roztworze jest równa $100g$ i zapisze ze nowy roztwór ma masę 250 g i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

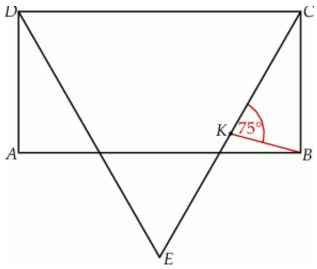
0 punktów – gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania.

Zadanie 22 (3p.)

W prostokącie $ABCD$ przedstawionym na rysunku bok AB jest dwa razy dłuższy niż bok BC. Punkt E jest takim punktem, że trójkąt DCE jest równoboczny, zaś punkt K jest środkiem boku CE tego trójkąta. Wykaż, że $\measuredangle BKC = 75^\circ$.



Przykładowe rozwiązanie



Oznaczmy przez x długość boku BC.

Zatem $|BC| = x, a\ |AB| = |DC| = 2x$

Trójkąt DCE jest równoboczny zatem $|CE| = 2x$ i $\sphericalangle DCE = 60^\circ$.

Jeśli $\sphericalangle DCE = 60^\circ$ to $\sphericalangle KCB = \sphericalangle BCD - \sphericalangle DCE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Skoro punkt K jest środkiem odcinka CE to $|CK| = \frac{|CE|}{2} = \frac{2x}{2} = x$.

Zauważmy, że trójkąt CKB jest równoramienny o podstawie KB ponieważ $|CK| = |CB| = x$.

Suma kątów w każdym trójkącie wynosi 180° .

Zatem $\sphericalangle BKC = (180^\circ - \sphericalangle KCE): 2 = (180^\circ - 30^\circ): 2 = 150^\circ: 2 = 75^\circ$ co kończy dowód.

Zasady oceniania: Uczeń otrzymuje

3 punkty – gdy poprawnie uzasadni, że $\sphericalangle BKC = 75^\circ$

2 punkty – gdy

- zapisze zależności między bokami prostokąta np. $|BC| = x, a|DC| = 2x$ i wyznaczy miarę kąta $\sphericalangle KCB = 30^\circ$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze zależności między bokami prostokąta np. $|BC| = x, a\ |AB| = 2x$ i wyznaczy miarę kąta $\sphericalangle KCB = 30^\circ$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze zależności między bokami prostokąta np. $|BC| = x, a\ |AB| = 2x$ i zauważy, że trójkąt CKB jest równoramienny i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**

1 punkt – gdy

- zapisze zależności między bokami prostokąta np. $|BC| = x, a|DC| = 2x$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze zależności między bokami prostokąta np. $|BC| = x, a\ |AB| = 2x$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- wyznaczy miarę kąta $\sphericalangle KCB = 30^\circ$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze zależności między długościami odcinków np. $|CK| = x$ i $|DC| = 2x$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

0 punktów – gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania

Uwaga!!! Akceptujemy rozwiązanie przeprowadzone na rysunku. Wystarczy, że uczeń poprawnie zaznaczy na rysunku odpowiednie kąty, zapisze na rysunku długości poszczególnych odcinków i poda uzasadnienie.

Zadanie 23 (3p.)

Do ponumerowania stron pewnej książki wykorzystano 339 cyfr. Wyznacz ile stron ma ta książka.

Przykładowe rozwiązanie

I sposób

339– ilość cyfr, które wykorzystano do ponumerowania książki.

Zauważmy, że liczba stron w książce nie może być 4 cyfrowa, bo liczb trzycyfrowych jest 900 zatem cyfr potrzebnych do zapisu wszystkich liczb trzycyfrowych byłoby potrzebnych 2700.

Liczba stron zapisanych przy pomocy liczb jednocyfrowych wynosi 9.

Liczba cyfr potrzebnych do zapisania liczb jednocyfrowych wynosi $9 \cdot 1 = 9$.

Liczba stron zapisanych przy pomocy liczb dwucyfrowych wynosi 90.

Liczba cyfr potrzebnych do zapisania liczb dwucyfrowych wynosi $90 \cdot 2 = 180$.

Liczba cyfr potrzebnych do zapisania liczb jedno i dwucyfrowych wynosi 189.

Zatem na liczby trzy cyfrowe zużyto 339-189 =150 cyfr.

Czyli liczba stron trzycyfrowych wynosi 150:3=50.

Najmniejszą liczbą trzy cyfrową jest liczba 100.

Zatem liczba stron tej książki jest równa 149.

Zasady oceniania I sposobem:

Uczeń otrzymuje

3 punkty – gdy poprawnie wyznaczy liczbę stron książki równą 149,

2 punkty – gdy poprawnie wyznaczy liczbę stron trzycyfrowych książki równą 50 i na tym zakończy lub dalej popełni błędy,

1 punkt – gdy poprawnie wyznaczy liczbę cyfr **(189)** potrzebnych do zapisu liczb jedno i dwucyfrowych i na tym zakończy lub dalej popełni błędy,

0 punktów – gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania.

II sposób

339– ilość cyfr, które wykorzystano do ponumerowania książki.

Zauważmy, że liczba stron w książce nie może być 4 cyfrowa, bo liczb trzycyfrowych jest 900 zatem cyfr potrzebnych do zapisu wszystkich liczb trzycyfrowych byłoby potrzebnych 2700.

Liczba stron zapisanych przy pomocy liczb jednocyfrowych wynosi 9.

Liczba stron zapisanych przy pomocy liczb dwucyfrowych wynosi 90.

x- liczba stron trzycyfrowych

$9+90\cdot 2+x\cdot 3=339$

$3x=150$

$x=50$

Zatem liczba stron tej książki jest równa 149.

Zasady oceniania II sposobem:

Uczeń otrzymuje

3 punkty – gdy poprawnie wyznaczy liczbę stron książki równą 149,

2 punkty – gdy

- poprawnie wyznaczy liczbę stron trzycyfrowych książki równą $x=50$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- rozwiąże z błędem rachunkowym równanie $9+90\cdot 2+x\cdot 3=339$ i otrzyma rozwiązanie, które jest liczbą naturalną dodatnią, ale do błędnie wyliczonego x poprawnie poda ilość stron książki równą (99+x).

1 punkt – gdy

- zapisze poprawnie równanie np. $9+90\cdot 2+x\cdot 3=339$ i na tym zakończy lub otrzyma rozwiązanie które nie jest liczbą naturalną dodatnią **lub**
- poprawnie wyznaczy liczbę cyfr **(189)** potrzebnych do zapisu liczb jedno i dwucyfrowych i na tym zakończy lub dalej popełni błędy,

0 punktów – gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania.

III sposób

339– ilość cyfr, które wykorzystano do ponumerowania książki.

Zauważmy, że liczba stron w książce nie może być 4 cyfrowa, bo liczb trzycyfrowych jest 900 zatem cyfr potrzebnych do zapisu wszystkich liczb trzycyfrowych byłoby potrzebnych 2700.

Liczba stron zapisanych przy pomocy liczb jednocyfrowych wynosi 9

Liczba stron zapisanych przy pomocy liczb dwucyfrowych wynosi 90

x- liczba stron w książce

$9+90 \cdot 2+(x-99) \cdot 3=339$

$9+180+3x-297=339$

$3x=447$

$x=149$

Zatem liczba stron tej książki jest równa 149.

Zasady oceniania III sposobem: Uczeń otrzymuje

3 punkty – gdy poprawnie wyznaczy liczbę stron książki równą 149,

2 punkty – gdy poprawnie ułoży równanie np. $9+90 \cdot 2+(x-99) \cdot 3=339$, gdzie x jest liczbą stron w książce i na tym zakończy lub dalej błędy.

1 punkt – gdy

- zapisze, że liczba cyfr potrzebnych do zapisu wszystkich stron trzycyfrowych tej książki jest równa $(x-99) \cdot 3$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy liczbę cyfr **(189)** potrzebnych do zapisu liczb jedno i dwucyfrowych i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

0 punktów – gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania.

Uwaga !!!

Uczeń nie musi przedstawiać uzasadnienia, że liczba stron tej książki jest liczbą trzycyfrową.

Zadanie 24 (2p.)

Na półce stoi kolejno 6 tomów „Trylogii”: 2 tomy „ Ogniem i mieczem”, 3 tomy „Potopu” i „Pan Wołodyjowski”. Wszystkie tomy są ustawione jeden za drugim, brzegiem książki do osoby stojącej przed półką, żaden z tomów nie stoi do góry nogami (rysunek). Kornik książkowy przegryza jedną tekturową okładkę przez dwie godziny, a wszystkie kartki dowolnego tomu przez godzinę. Startuje od pierwszej strony pierwszego tomu „Ogniem i mieczem”. Po jakim czasie dotrze do ostatniej strony „Pana Wołodyjowskiego”.

Henryk Sienkiewicz **Ogniem i mieczem Tom I**	Henryk Sienkiewicz **Ogniem i mieczem Tom II**	Henryk Sienkiewicz **Potop Tom I**	Henryk Sienkiewicz **Potop Tom II**	Henryk Sienkiewicz **Potop Tom III**	Henryk Sienkiewicz **Pan Wołodyjowski**

Przykładowe rozwiązanie

Zauważmy, że kornik będzie musiał przegryźć 10 okładek tekturowych i kartki z 4 tomów.

$10 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 24.$

24 godziny – czas po którym kornik dotrze do ostatniej strony Pana Wołodyjowskiego.

Wyjaśnienie

Ważne jest to, że wszystkie książki ustawione są kolejno i żadna z nich nie stoi do góry nogami.

Kornik nie musi przegryźć kartek z I tomu Ogniem i Mieczem ponieważ pierwsza strona I tomu Ogniem i Mieczem znajduje się tuż przy przedniej okładce I tomu tej książki. Nie musi też przegryźć kartek z Pana Wołodyjowskiego, ponieważ ostatnia strona Pana Wołodyjowskiego znajduje się tuż przy tylnej okładce Pana Wołodyjowskiego.

Zasady oceniania

Uczeń otrzymuje

2 punkty – gdy poprawnie wyznaczy liczbę godzin równą 24,

1 punkt – gdy

- zauważy, że kornik musi przegryźć **4 tomy kartek** i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- policzy czas potrzebny do przegryzienia kartek $4 \cdot 1 = 4\ godziny$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- policzy czas potrzebny do przegryzienia okładek $10 \cdot 2 = 20\ \ godzin$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy
- **0 punktów –** gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania.

Uwaga !!!

- Jeśli uczeń bez żadnych obliczeń poda, że szukany czas wynosi 24 godziny to otrzymuje **2 punkty.**
- Jeśli w rozwiązaniu zadania pojawia się zapis $10 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 26$ to przyznajemy **1 punkt** za obliczenie czasu potrzebnego do przegryzienia okładek .

Zadanie 25 (4p.)

W sklepie są wafle po $8\ zł$ i po $12\ zł$ za kilogram. Sprzedawca chce zrobić mieszankę tych wafli po $11\ zł$ za kilogram. Ile wafli każdego rodzaju powinien zmieszać, aby otrzymać $20\ kg$ mieszanki?

Przykładowe rozwiązanie

I sposób

$x - ilość\ kilogramów\ wafli\ po\ 8\ \text{zł}$

$y - ilość\ kilogramów\ wafli\ po\ 12\ \text{zł}$

$20\ kg - ilość\ kilogramów\ otrzymanej\ miesznaki$

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ \dfrac{8x + 12y}{20} = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 8x + 12y = 220 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 2x + 3y = 55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 20 - y \\ 2(20 - y) + 3y = 55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 20 - y \\ 40 - 2y + 3y = 55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 20 - y \\ y = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 15 \end{cases}$$

Sprzedawca powinien wymieszać 5 kg wafli po 8 zł i 15 kg wafli po 12 zł aby otrzymać 20 kg mieszanki w cenie 11 zł.

Zasady oceniania rozwiązania I sposobem

Uczeń otrzymuje

4 punkty - gdy

- poprawnie rozwiąże zadanie i zapisze, że sprzedawca powinien wymieszać 5 kg wafli po 8 zł i 15 kg wafli po 12 zł **lub**
- poprawnie rozwiąże układ równań, np. $\begin{cases} x = 5 \\ y = 15 \end{cases}$, ale nie sformułuje odpowiedzi.

3 punkty – gdy

- rozwiązując poprawny układ równań wyznaczy x =5 i na tym zakończy lub dalej popełni **lub**
- rozwiązując poprawny układ równań wyznaczy y =12 i na tym zakończy lub dalej popełni **lub**
- rozwiązując poprawny układ równań wyznaczy z błędem rachunkowym x, które jest dodatnie i mniejsze od 20 i konsekwentnie do popełnionego błędu wyznaczy poprawnie y, które jest dodatnie i mniejsze od 20 **lub**
- rozwiązując poprawny układ równań wyznaczy z błędem rachunkowym y, które jest dodatnie i mniejsze od 20 i konsekwentnie do popełnionego błędu wyznaczy poprawnie x, które jest dodatnie i mniejsze od 20.

2 punkty –

- gdy zapisze poprawny układ równań i otrzyma poprawne równanie i na tym zakończy **lub**
- gdy zapisze poprawny układ równań i rozwiązując go popełni błędy, w wyniku których chodź jedno z rozwiązań jest liczbą większą od 20 lub mniejszą od 0.

1 punkt – gdy zapisze poprawny układ równań układ z dwiema niewiadomymi i na tym zakończy lub popełni błędy innego typu niż omówione wyżej.

0 punktów – gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania .

II sposób

$x - ilość\ kilogramów\ wafli\ po\ 8$ zł

$(20 - x) - ilość\ kilogramów\ wafli\ po\ 12$ zł

$$\frac{8x + 12(20 - x)}{20} = 11$$

$$8x + 12(20 - x) = 220$$

$$8x + 240 - 12x = 220$$

$$-4x = -20$$

$$x = 5$$

Sprzedawca powinien wymieszać 5 kg wafli po 8 zł i 15 kg wafli po 12 zł aby otrzymać 20 kg mieszanki w cenie 11 zł.

Zasady oceniania rozwiązania I sposobem

Uczeń otrzymuje

4 punkty -

- gdy poprawnie rozwiąże zadanie i zapisze, że sprzedawca powinien wymieszać 5 kg wafli po 8 zł i 15 kg wafli po 12 zł **lub**
- gdy poprawnie ułoży i rozwiąże równanie z jedną niewiadomą np. $\frac{8x+12(20-x)}{20} = 11$ i zapisze, że $x = 5\ \ i\ 20 - x = 15$, **lub**
- gdy poprawnie ułoży i rozwiąże równanie z jedną niewiadomą np. $\frac{8(20-x)+12x}{20} = 11$ i zapisze, że $x = 15\ \ i\ 20 - x = 5$.

3 punkty – gdy

- gdy poprawnie ułoży i rozwiąże równanie z jedną niewiadomą np. $\frac{8x+12(20-x)}{20} = 11$ i zapisze, że $x = 5$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- gdy poprawnie ułoży i rozwiąże równanie z jedną niewiadomą np. $\frac{8(20-x)+12x}{20} = 11$ i zapisze, że $x = 15$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**

- poprawnie ułoży równanie i wyznaczy z błędem rachunkowym x, które jest dodatnie i mniejsze od 20 i konsekwentnie do popełnionego błędu wyznaczy poprawnie 20-x, które jest dodatnie i mniejsze od 20.

2 punkty – gdy

- poprawnie ułoży równanie z jedną niewiadomą np. $\frac{8x+12(20-x)}{20} = 11$ i na tym zakończy lub rozwiązanie tego równania jest liczbą większą od 20 lub mniejszą od 0 **lub**
- poprawnie ułoży równanie z jedną niewiadomą np. $\frac{8(20-x)+12x}{20} = 11$ i na tym zakończy lub rozwiązanie tego równania jest liczbą większą od 20 lub mniejszą od 0.

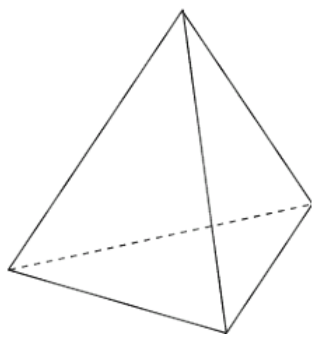
0 punktów – gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania .

Uwaga !!!

- Przyznajemy **4 punkty gdy uczeń** poda poprawną odpowiedź, że sprzedawca powinien wymieszać 5 kg wafli po 8 zł i 15 kg wafli po 12 zł i dokona sprawdzenia wszystkich warunków zadania.
- Przyznajemy **1 punkt gdy uczeń** poda poprawną odpowiedź, że sprzedawca powinien wymieszać 5 kg wafli po 8 zł i 15 kg wafli po 12 zł i nie dokona sprawdzenia wszystkich warunków zadania.

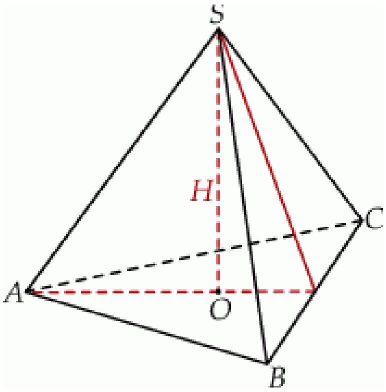
Zadanie 26 (5p.)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź boczna ma długość $8\ cm$. Wyznacz objętość tego ostrosłupa jeśli krawędź boczna jest nachylona jest do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°.



Przykładowe rozwiązanie

Pomocniczy rysunek



1. Dane $|AS| = 8cm\ i\ \measuredangle SAO = 60^\circ$
2. Szukana $V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$
3. Zauważmy, że podstawa ostrosłupa jest trójkątem równobocznym.
4. Zauważmy że trójkąt AOS jest trójkątem prostokątnym :
   $\measuredangle SAO = 60^\circ, \measuredangle ASO = 30^\circ, \measuredangle SOA = 90^\circ$ i $|AS| = 8cm$
5. Z zależności między długościami boków w trójkącie $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$
   $|AO| = 4\ cm$ i $|OS| = H = 4\sqrt{3}\ cm$
6. Odcinek $|AO| = \frac{2}{3}h_p,\ gdzie\ h_p$ oznacza długość wysokości podstawy.
7. $\frac{2}{3}h_p = 4\ cm,\ \ zatem\ h_p = 6\ cm$,
8. Trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym, Jeśli krawędź podstawy oznaczymy jako a to
   $h_p = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.
9. $Jeśli\ h_p = 6\ i\ h_p = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ otrzymujemy równanie
   $$a\frac{\sqrt{3}}{2} = 6$$
   $$a\sqrt{3} = 12$$
   $$3a = 12\sqrt{3}$$
   $$a = 4\sqrt{3}$$
10. Krawędź podstawy ostrosłupa wynosi $4\sqrt{3}\ cm$.
11. $P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(4\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\ cm^2 = \frac{16 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} cm^2 = 12\sqrt{3}cm^2$
12. $V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}\ cm^3 = 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}cm^3 = 16 \cdot 3cm^3 = 48cm^3$

Objętość ostrosłupa wynosi $48cm^3$.

Zasady oceniania rozwiązania

Uczeń otrzymuje

5 punktów –gdy poprawnie rozwiąże zadanie i zapisze, że objętość ostrosłupa wynosi $48cm^3$.

4 punkty – gdy

- poprawnie wyznaczy wysokość ostrosłupa $H = 4\sqrt{3}\ cm$ i pole powierzchni podstawy $P_p = 12\sqrt{3}cm^2$ i nie wyznaczy objętości ostrosłupa lub wyznaczając objętość ostrosłupa popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy wysokość ostrosłupa $H = 4\sqrt{3}\ cm$ i krawędź podstawy a = $4\sqrt{3}\ cm$ wyliczając objętość ze wzoru $V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H = \frac{1}{3}\frac{(4\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 4\sqrt{3}$ popełni błąd rachunkowy lub nie wyliczy objętości **lub**
- poprawnie wyznaczy wysokość ostrosłupa $H = 4\sqrt{3}\ cm$ i krawędź podstawy a = $4\sqrt{3}\ cm$ i z błędem rachunkowym wyliczy P_p i z popełnionym błędem rachunkowym rozwiąże poprawnie zadanie do końca tj. wyznaczy poprawnie objętość ostrosłupa do źle wyznaczonej powierzchni podstawy **lub**
- poprawnie wyznaczy wysokość ostrosłupa $H = 4\sqrt{3}\ cm$, ułoży poprawne równanie na wyznaczenie krawędzi podstawy np. $a\frac{\sqrt{3}}{2} = 6$ i popełni błąd rachunkowy przy wyznaczaniu długości krawędzi podstawy i z popełnionym błędem rachunkowym rozwiąże poprawnie zadanie do końca tj. wyznaczy poprawnie objętość ostrosłupa do źle wyznaczonej długości krawędzi podstawy **.**

3 punkty – gdy

- poprawnie wyznaczy $H = 4\sqrt{3}\ cm$ i $h_p = 6$ i na tym zakończy lub wyznaczając długość krawędzi podstawy skorzysta ze niepoprawnych zależności **lub**
- poprawnie wyznaczy krawędź podstawy a= $4\sqrt{3}\ cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy pole powierzchni podstawy $P_p = 12\sqrt{3}cm^2$ i na tym zakończy lub dalej popełni.

2 punkty – gdy

- poprawnie wyznaczy $H = 4\sqrt{3}\ cm\ \ i\ |AO| = 4\ cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy $h_p = 6$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

1 punkt – gdy

- poprawnie wyznaczy $H = 4\sqrt{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy $|AO| = 4\ cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie zapisze, zależności w trójkącie AOS np.:
  $|AS| = 2|AO|\ \ i\ |SO| = |A0|\sqrt{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**

- poprawnie zapisze zależność np.: $|AO| = \frac{1}{3}h_p$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- sporządzi rysunek pomocniczy i zaznaczy na nim kąt między krawędzią boczną i płaszczyzną podstawy i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

0 punktów – gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania**.**

Uwaga !!!

Jeśli uczeń błędnie zaznaczy kąt nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy to może maksymalnie otrzymać 1 punkt, o ile poprawnie zapisze zależność $|AO| = \frac{1}{3}h_p$.