Login uczestnika **Pieczęć szkoły** **Data urodzenia uczestnika**

Dzień Miesiąc Rok

………………………………………………

Wojewódzki Konkurs Matematyczny

dla uczniów szkół podstawowych województwa wielkopolskiego – stopień szkolny 2020/2021

Myślę, działam, odkrywam, tworzę

Instrukcja dla uczestnika

1. Sprawdź, czy test zawiera **15 stron**. Ewentualny brak stron lub inne usterki zgłoś Komisji przed rozpoczęciem konkursu.
2. Czytaj uważnie wszystkie teksty i zadania. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra piszącego czarnym lub niebieskim kolorem. Nie używaj korektora.
3. Test, do którego przystępujesz, zawiera **26 zadań**. Wśród nich są zadania zamknięte, zadania typu prawda fałsz oraz zadania otwarte wymagające krótszej lub dłuższej odpowiedzi. Zadania zamknięte to zadania od 1 do 20. Zadania prawda - fałsz to zadania od 21 do 23.
4. W każdym **zadaniu zamkniętym** wybierz tylko **jedną odpowiedź** i zamaluj długopisem/piórem odpowiednią kratkę na karcie odpowiedzi, np. gdy wybrałeś odpowiedź „**A**”:

A	B	C	D

   Jeśli się pomylisz, błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz inną odpowiedź, np.:

A	B	C	D

   Za każdą poprawnie udzieloną odpowiedź otrzymasz jeden punkt, a za odpowiedzi błędne lub brak odpowiedzi – zero punktów.
5. W zadaniach **prawda – fałsz** oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe, np. gdy wybrałeś odpowiedź „**P**”:

P	F

   Jeśli się pomylisz, błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz inną odpowiedź, np.:

P	F
6. W zadaniach **otwartych** zapisz rozwiązania starannie i czytelnie w miejscach wyznaczonych przy poszczególnych zadaniach. Pamiętaj, że pominięcie uzasadnienia lub części obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów. Pomyłki przekreślaj (nie stosuj korektora).
7. Rozwiązując zadania, możesz korzystać z przyborów geometrycznych (linijki i cyrkla) oraz ze strony oznaczonej jako **brudnopis**. Zapisy w brudnopisie nie będą sprawdzane i oceniane.
8. Podczas trwania konkursu nie możesz korzystać z żadnych pomocy naukowych (w tym również kalkulatora i urządzeń elektronicznych) oraz podpowiedzi kolegów – narażasz ich i siebie na dyskwalifikację. Nie wolno Ci również zwracać się z jakimikolwiek wątpliwościami do członków Komisji.
9. Za rozwiązanie całego testu możesz otrzymać maksymalnie **40 punktów**. Do stopnia rejonowego zakwalifikują się uczniowie, którzy zdobędą co najmniej **80% punktów, czyli 32 punkty.**
10. Na udzielenie odpowiedzi masz **90 minut.**

Życzymy Ci powodzenia!

Wypełnia Komisja (po rozkodowaniu pracy)

………………………………………………………………

Imię i nazwisko uczestnika **Liczba uzyskanych punktów** ……… **/ 40**

Zadanie 1. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Z drutu o długości 72 cm zbudowano prostopadłościan, którego krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka są w stosunku 1:2:3. Zatem najdłuższa krawędź prostopadłościanu wynosi:

A. 6 cm B. 12 cm C. 9 cm D. 15 cm

Zadanie 2. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Dane są liczby $x = 7{,}5 \cdot 10^{-10}$ oraz $y = 1{,}5 \cdot 10^{4}$. Zatem iloraz $\frac{x}{y}$ jest równy:

A. $5 \cdot 10^{-14}$ B. $5 \cdot 10^{-6}$ C. $2 \cdot 10^{13}$ D. $2 \cdot 10^{-7}$

Zadanie 3. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Z niedzieli na poniedziałek w nocy szkolny zegar równo o północy zaczął spieszyć się o 10 minut w ciągu każdej godziny. W poniedziałek rano, gdy uczniowie przyszli do szkoły o ósmej byli bardzo zdumieni bo na szkolnym zegarze zobaczyli godzinę:

A. 9^{00} B. 9^{10} C. 9^{20} D. 9^{30}

Zadanie 4. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Ania wypiła z pełnej szklanki 75% soku pomarańczowego i w szklance zostało 0,15 l soku. Wynika z tego, że:

A. Pojemność szklanki to 750 ml
B. Ania wypiła 0,5 l soku
C. Pojemność szklanki to 0,5 l
D. Ania wypiła 450 ml soku

Zadanie 5. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Wartość wyrażenia $\frac{2^8-2^7}{16^2}$ jest równa:

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 4

Zadanie 6. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, których suma cyfr wynosi 3?

A. 7 B. 9 C. 10 D. 6

Zadanie 7. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

O godzinie 13:00 maratończyk znajdował się w odległości 12000 m od mety. Zakładając, że biegł ze stałą prędkością 18 km/h, dobiegł do mety o godzinie:

A. 13^{20} B. 13^{40} C. 13^{50} D. 14^{00}

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Zadanie 8. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Na urodziny do Asi przyszło czworo przyjaciół: Bartek, Antek, Maja i Ola. Mama Asi upiekła torcik urodzinowy. Bartkowi Asia odkroiła $\frac{1}{5}$ torcika, Antkowi $\frac{1}{4}$ pozostałej części, Mai $\frac{1}{3}$ reszty, a to co zostało podzieliła po połowie między siebie i Olę. Wynika, z tego, że:

A. Bartek otrzymał największy kawałek torcika
B. Każda z pięciu osób dostała taki sam kawałek torcika
C. Antek dostał więcej torcika od Mai
D. Maja dostała najmniejszy kawałek torcika

Zadanie 9. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Grupa przyjaciół spotkała się ze sobą po wakacjach. Każdy przywitał się z każdym i zamienił chociaż parę słów. Wszystkich powitań było 15, zatem liczba przyjaciół na spotkaniu była

A. równa 5 B. liczbą pierwszą C. równa 6 D. większa niż 7

Zadanie 10. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Spośród pięciu kątów, które razem tworzą kąt pełny, każdy następny jest o 20° mniejszy od poprzedniego. Najmniejszy z tych kątów ma miarę

A. 32° B. 112° C. 42° D. 22°

Zadanie 11. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Po dwóch kolejnych obniżkach cen, za pierwszym razem o 20% i za drugim razem o 10% koszula kosztuje 90 zł. Wynika z tego, że koszula przed obniżkami kosztowała:

A. 150 zł B. 125 zł C. 100 zł D. 200 zł

Zadanie 12. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Wartość liczbowa wyrażenia $\frac{a^2-1}{a^3-1}$ dla $a = -2$ jest równa

A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

Zadanie 13. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Pewien ostrosłup ma 50 wierzchołków. Liczba krawędzi tego ostrosłupa wynosi:

A. 100 B. 98 C. 49 D. 50

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Zadanie 14. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Wartość wyrażenia $\left|-1-|2-3|\right|+|-3|$ jest równa:

A. 3 B. 5 C. -3 D. -1

Zadanie 15. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

19,2 km **nie jest równe**

A. $1{,}92\ \cdot 10^3 m$ B. $1{,}92\ \cdot 10^5 dm$ C. $1{,}92\ \cdot 10^6 cm$ D. $1{,}92\ \cdot 10^7 mm$

Zadanie 16. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Wartość wyrażenia $\left(2\sqrt{32}+4\sqrt{8}-3\sqrt{50}\right):\sqrt{2}$ jest równa:

A. -1 B. -15 C. $3\sqrt{2}$ D. 1

Zadanie 17. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Liczba odwrotna do liczby, która jest rozwiązaniem równania: $2-\frac{x-2}{6}=\frac{x}{2}+3$ jest równa:

A. -1 B. 1 C. $-\frac{1}{2}$ D. 2

Zadanie 18. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Jeden metr sześcienny betonu waży 2300 kg. Na wylanie prostokątnego tarasu o wymiarach 4 m na 5 m zużyto 6,9 tony betonu. Grubość warstwy betonu na tym tarasie wynosi:

A. 12 cm B. 10 cm C. 15 cm D. 17 cm

Zadanie 19. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Długości boków trójkąta prostokątnego są równe 7 cm, 24 cm i 25 cm. Najkrótsza wysokość tego trójkąta wynosi:

A. 2 cm B. 6,72 cm C. 3,6 cm D. 8,25 cm

Zadanie 20. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Do upieczenia sernika na 0,6 kg sera potrzeba 4 jajka. Ile jaj należy wziąć, jeśli na sernik chcemy przeznaczyć 1,5 kg sera?

A. 12 B. 15 C. 8 D. 10

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Zadania otwarte

Zadanie 21. (3 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Kasia i Janek są rodzeństwem. Ich tata ma 2 razy więcej lat niż razem mają jego córka Kasia i syn Janek. Kasia jest trzy razy starsza od brata Janka i o 30 lat młodsza od taty. Określ prawdziwość zdań, zaznaczając P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub zaznaczając F, jeśli zdanie jest fałszywe.

Janek ma 12 lat.	P	F
Kasia ma 18 lat.	P	F
Tata ma 54 lata.	P	F

Zadanie 22. (3 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Liczba 3X57X jest liczbą pięciocyfrową, gdzie X oznacza taką samą cyfrę. Określ prawdziwość zdań, zaznaczając P, jeśli zdanie jest prawdziwe lub zaznaczając F, jeśli zdanie jest fałszywe.

Jeżeli X=6 to liczba dzieli się przez 9.	P	F
Jeżeli X=0 to liczba dzieli się przez 30.	P	F
Jeżeli X=2 to liczba dzieli się przez 6.	P	F

Zadanie 23. (4 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **4**

Nikodem i Baltazar są braćmi. Jednocześnie wyszli z domu na basen, na który prowadzi ścieżka pieszo – rowerowa. Nikodem całą trasę, pokonał biegnąc z tą samą szybkością. Baltazar połowę trasy jechał na rowerze z prędkością pięć razy większą od Nikodema. Drugą połowę trasy pokonał pieszo z prędkością dwa razy mniejszą niż prędkość Nikodema. Określ prawdziwość zdań, zaznaczając P, jeśli zdanie jest prawdziwe lub zaznaczając F, jeśli zdanie jest fałszywe.

Jeden z chłopców pokonał trasę w czasie o 10 % dłuższym.	P	F
Nikodem dotarł na basen wcześniej.	P	F
Baltazar dotarł na basen wcześniej.	P	F
Obaj chłopcy pokonali trasę w tym samym czasie.	P	F

Zadanie 24. (3 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

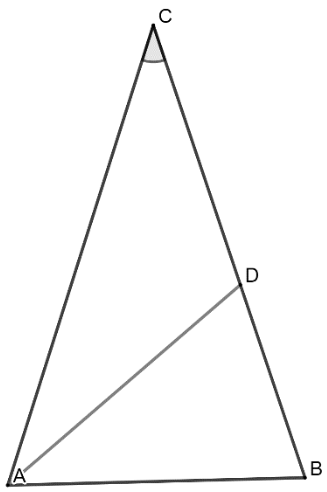
Laptop kosztował 3000 zł. Jego cenę podwyższono o 10%. Z powodu małego zainteresowania cenę obniżono o 20% i przy zakupie płatnym bezgotówkowo udzielono jeszcze bonifikaty w postaci 5% ceny. Ile zapłaci klient kupując ten laptop i płacąc bezgotówkowo? Zapisz obliczenia.

Zadanie 25. (3 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Wykaż, że suma liczb trzycyfrowych postaci XYZ+ZXY+YZX, jest podzielna przez 111, wiedząc, że X, Y, Z oznaczają dowolne cyfry i są różne od zera.

Zadanie 26. (4 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **4**

W trójkącie równoramiennym ABC, w którym AC=BC, na ramieniu BC zaznaczono punkt D i poprowadzono odcinek AD. W ten sposób rozcięto trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramienne CAD i BDA tak, że AB=AD=CD. Kąt ACB oznacz ∝. Wyznacz miarę kąta ∝.



Brudnopis (nie podlega ocenie)

STOPIEŃ SZKOLNY 2020/2021
Wojewódzkiego Konkursu Matematycznego
dla uczniów szkół podstawowych województwa wielkopolskiego

Karta odpowiedzi zadań zamkniętych

Login uczestnika

Data urodzenia uczestnika

Dzień Miesiąc Rok

Numer zadania	Odpowiedzi				Liczba punktów
1.	A	B	C	D	
2.	A	B	C	D	
3.	A	B	C	D	
4.	A	B	C	D	
5.	A	B	C	D	
6.	A	B	C	D	
7.	A	B	C	D	
8.	A	B	C	D	
9.	A	B	C	D	
10.	A	B	C	D	
11.	A	B	C	D	
12.	A	B	C	D	
13.	A	B	C	D	
14.	A	B	C	D	
15.	A	B	C	D	
16.	A	B	C	D	
17.	A	B	C	D	
18.	A	B	C	D	
19.	A	B	C	D	
20.	A	B	C	D	

Wypełnia komisja konkursowa

Suma punktów za zadania zamknięte

Suma punktów za zadania otwarte

Suma punktów za cały arkusz

Wypełnia Szkolna Komisja Konkursowa

Suma uzyskanych punktów: ....

....

Podpis nauczyciela oceniającego (imieniem i nazwiskiem)

Wojewódzki Konkurs Matematyczny

dla uczniów szkół podstawowych województwa wielkopolskiego

Myślę, działam, odkrywam, tworzę

STOPIEŃ SZKOLNY rok szkolny 2020/2021

ZASADY OCENIANIA

Klucz punktowania zadań zamkniętych i schemat oceniania zadań otwartych

1. Klucz punktowania zadań zamkniętych.

Za każdą poprawną odpowiedź uczestnik otrzymuje **1 punkt**.

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Poprawna odpowiedź	C	A	C	D	B	C	B	B	C	A	B	A	B	B	A	D	A	C	B	D

2. Przykładowe rozwiązania i schemat oceniania zadań otwartych.

Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania nieuwzględnione w schemacie punktowania przyznajemy maksymalną liczbę punktów należnych za to zadanie.

UWAGA! Nie jest wymagana od uczestnika na końcu zadania wyraźnie sformułowana odpowiedź słowna. Wystarczy, że uczestnik wyznaczy, obliczy szukaną wartość, bądź przeprowadzi argumentację w zadaniu na dowodzenie.

Zadanie 21. (3 p.)

Kasia i Janek są rodzeństwem. Ich tata ma 2 razy więcej lat niż razem mają jego córka Kasia i syn Janek. Kasia jest trzy razy starsza od brata Janka i o 30 lat młodsza od taty. Określ prawdziwość zdań, zaznaczając P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub zaznaczając F, jeśli zdanie jest fałszywe.

Janek ma 12 lat	P	F
Kasia ma 18 lat	P	F
Tata ma 54 lata	P	F

Przykładowe rozwiązanie

$x - wiek\ Janka$

$3x - wiek\ Kasi$

$2(x + 3x) = 8x - wiek\ taty$

$3x + 30 = 8x$

$30 = 5x$

$6 = x$

Odp. Janek ma 6 lat, Kasia ma 18 lat, a tata ma 48 lat.

Za każdą poprawną odpowiedź uczestnik otrzymuje jeden punkt. Uczestnik w tym zadaniu nie musi przedstawiać rozwiązania. Punktujemy jedynie zaznaczone odpowiedzi w tabeli.

Schemat oceniania. Uczestnik otrzymuje:

3 punkty – gdy wszystkie odpowiedzi są poprawne,

2 punkty – gdy dwie odpowiedzi są poprawne,

1 punkt – gdy jedna odpowiedź jest poprawna,

0 punktów – gdy wszystkie odpowiedzi są błędne.

Zadanie 22. (3 p.)

Liczba 3X57X jest liczbą pięciocyfrową, gdzie X oznacza taką samą cyfrę. Określ prawdziwość zdań, zaznaczając P, jeśli zdanie jest prawdziwe lub zaznaczając F, jeśli zdanie jest fałszywe.

Jeżeli X=6 to liczba dzieli się przez 9	**P**	F
Jeżeli X=0 to liczba dzieli się przez 30	**P**	F
Jeżeli X=2 to liczba dzieli się przez 6	P	**F**

Przykładowe rozwiązanie

1. Jeśli X=6 to liczba 3X57X=36576

   Suma cyfr liczby 36576 wynosi 27. Liczba 27 jest podzielna przez 9. Zatem liczba 36576 tez jest podzielna przez 9.

2. Jeśli X=0 to 3X57X=30570. Ostatnią cyfrą tej liczby jest cyfra 0, zatem liczba 30570 jest podzielna przez 10. Suma cyfr liczby 30570 wynosi 15. Liczba 15 jest podzielna przez 3. Zatem liczba 30570 jest podzielna przez 3 i przez 10 czyli jest podzielna przez 30.
3. Jeśli X=2 to 3X57X=32572. Ostatnią cyfrą liczby 32572 jest cyfra 2 zatem liczba 32572 jest podzielna przez 2. Suma cyfr liczby 32572 wynosi 17, liczba 17 nie jest podzielna przez 3 czyli liczba 32572 nie jest podzielna przez 3. Liczba 32572 dzieli się przez 2 i nie dzieli się przez 3, czyli nie jest liczbą podzielną przez 6.

Za każdą poprawną odpowiedź uczestnik otrzymuje jeden punkt. Uczestnik w tym zadaniu nie musi przedstawiać rozwiązania. Punktujemy jedynie zaznaczone odpowiedzi w tabeli.

Schemat oceniania. Uczestnik otrzymuje:

3 punkty – gdy wszystkie odpowiedzi są poprawne,
2 punkty – gdy dwie odpowiedzi są poprawne,
1 punkt – gdy jedna odpowiedź jest poprawna,
0 punktów – gdy wszystkie odpowiedzi są błędne.

Zadanie 23. (4 p.)

Nikodem i Baltazar są braćmi. Jednocześnie wyszli z domu na basen, na który prowadzi ścieżka pieszo – rowerowa. Nikodem całą trasę, pokonał biegnąc z tą samą szybkością. Baltazar połowę trasy jechał na rowerze z prędkością pięć razy większą od Nikodema. Drugą połowę trasy pokonał pieszo z prędkością dwa razy mniejszą niż prędkość Nikodema. Określ prawdziwość zdań, zaznaczając P, jeśli zdanie jest prawdziwe lub zaznaczając F, jeśli zdanie jest fałszywe.

Jeden z chłopców pokonał trasę w czasie o 10 % dłuższym.	P	F
Nikodem dotarł na basen wcześniej.	P	F
Baltazar dotarł na basen wcześniej.	P	F
Obaj chłopcy pokonali trasę w tym samym czasie.	P	F

Przykładowe rozwiązanie 1

Oznaczmy, że

v – prędkość biegu Nikodema

t – czas, w którym Nikodem pokonał całą trasę

s – długość trasy.

t_B – czas, w którym Baltazar pokonał całą trasę

Zauważmy, $t = \frac{s}{v}$, więc jeśli Baltazar połowę trasy pokonał na rowerze, a pół pieszo to jego czas pokonania drogi można zapisać jako

$$t_B = \frac{\frac{1}{2}s}{5v} + \frac{\frac{1}{2}s}{\frac{1}{2}v} = \frac{1}{10}\frac{s}{v} + \frac{s}{v} = \frac{1}{10}t + t = 1{,}1t = 110\%t.$$

Nikodem dotarł na miejsce prędzej od Baltazara.

Czas pokonania całej trasy przez Baltazara był o 10 % dłuższy, niż czas pokonania trasy przez Nikodema.

__Przykładowe rozwiązanie 2__

$t -$ *czas pokonania całej trasy przez Nikodema*

$\frac{t}{2}$ - *czas pokonania połowy trasy przez Nikodema*

Skoro prędkość Baltazara na pierwszej połowie trasy była pięć razy większa od prędkości Nikodema, to czas pokonania połowy trasy przez Baltazara był 5 razy mniejszy od czasu Nikodema na połowie trasy, zatem

$\frac{t}{2} : 5 = \frac{t}{10} = 0{,}1t -$ *czas pokonania pierwszej połowy trasy przez Baltazara*

Skoro prędkość Baltazara na drugiej połowie trasy była dwa razy mniejsza od prędkości Nikodema, to czas pokonania drugiej połowy trasy przez Baltazara był dwa razy większy, od czasu Nikodema na połowie trasy, zatem

$2 \cdot \frac{t}{2} = t -$ *czas pokonania drugiej połowy trasy przez Baltazara*

0,1t+t=1,1t=110%t - czas pokonania całej trasy przez Baltazara.

Nikodem dotarł na miejsce prędzej od Baltazara.
Czas pokonania całej trasy przez Baltazara był o 10 % dłuższy, niż czas pokonania trasy przez Nikodema.

Schemat oceniania. Uczestnik otrzymuje:

4 punkty – gdy wszystkie odpowiedzi są poprawne,
3 punkty – gdy trzy odpowiedzi są poprawne,
2 punkty – gdy dwie odpowiedzi są poprawne,
1 punkt – gdy jedna odpowiedź jest poprawna,
0 punktów – gdy wszystkie odpowiedzi są błędne.

Zadanie 24. (3 p.)

Laptop kosztował 3000 zł. Jego cenę podwyższono o 10%. Z powodu małego zainteresowania cenę obniżono o 20% i przy zakupie płatnym bezgotówkowo udzielono jeszcze bonifikaty w postaci 5% ceny. Ile zapłaci klient kupując ten laptop i płacąc bezgotówkowo? Zapisz obliczenia.

Przykładowe rozwiązania

I metoda

3000 zł –początkowa cena laptopa

$10\% \cdot 3000\ zł = 0{,}1 \cdot 3000\ zł = 300\ zł - kwota, o\ którą\ podrożał\ laptop$

$3000\ zł + 300\ zł = 3300\ zł$ - cena laptopa po 10 % podwyżce

$20\% \cdot 3300\ zł = 0{,}2 \cdot 3300\ zł = 660\ zł - \ kwota, o\ którą\ obniżono\ cenę\ laptopa$

$3300\ zł - 660\ zł = 2640\ zł -$ cena laptopa po 20 % obniżce

$5\% \cdot 2640\ zł = 0{,}05 \cdot 2640\ zł = 132\ zł - bonifikata, za\ transakcję\ bezgotówkową$

$2640\ zł - 132\ zł = 2508\ zł - ostateczna\ cena\ jaką\ zapłaci\ klient.$

Klient, który kupi laptop i dokona płatności bezgotówkowej zapłaci za laptop 2508 zł.

II metoda

$110\% \cdot 3000\ zł = 1{,}1 \cdot 3000\ zł = 3300\ zł \ - \ cena\ laptopa\ po\ 10\ \%\ podwyżce$

$80\% \cdot 3300\ zł = 0{,}8 \cdot 3300\ zł = 2640\ zł -$ cena laptopa po 20 % obniżce

$95\% \cdot 2640\ zł = 0{,}95 \cdot 2640\ zł = 2508\ zł - ostateczna\ cena\ jaką\ zapłaci\ klient.$

Klient, który kupi laptop i dokona płatności bezgotówkowej zapłaci za laptop 2508 zł.

Schemat oceniania rozwiązania I i II metodą. Uczestnik otrzymuje:

3 punkty – gdy poprawnie rozwiąże zadanie i zapisze, że ostateczna cena laptopa to 2508 zł.

2 punkty – gdy wyznaczając ostateczną cenę laptopa poprawnie zinterpretuje wszystkie podwyżki i obniżki i popełni jedynie błędy rachunkowe, np.:

- z błędem rachunkowym wyznaczy podwyżkę o 10 % i konsekwentnie do popełnionego błędu poprawnie wyznaczy obniżkę o 20 % i bonifikatę o 5% **lub**
- poprawnie wyznaczy podwyżkę o 10% , popełni błąd rachunkowy wyznaczając obniżkę o 20% i konsekwentnie do popełnionego błędu poprawnie wyznaczy bonifikatę o 5% **lub**
- poprawnie wyznaczy podwyżkę o 10% i poprawnie wyznaczy obniżkę o 20%, ale popełni błąd rachunkowy w bonifikacie o 5%.

1 punkt – gdy wyznaczając ostateczną cenę laptopa:

- poprawnie poda wartość ceny laptopa po podwyżce o 10% i na tym zakończy lub dalej popełni błędy w interpretacji obniżek lub popełni błędy rachunkowe w obniżce o 10% i bonifikacie o 5% **lub**
- niepoprawnie zinterpretuje podwyżkę o 10% i konsekwentnie do popełnionego błędu poprawnie wyznaczy obniżkę o 20 % i bonifikatę o 5%

0 punktów – gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania**.**

III metoda

$95\% \cdot 80\% \cdot 110\% \cdot 3000\ zł = 0{,}95 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}1 \cdot 3000\ zł = \frac{95}{100} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{11}{10} \cdot 3000\ zł = 9{,}5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 3\ zł = 76 \cdot 33\ zł = 2508\ zł - ostateczna\ cena\ jaką\ zapłaci\ klient.$

Klient, który kupi laptop i dokona płatności bezgotówkowej zapłaci za laptop 2508 zł.

Schemat oceniania rozwiązania III metodą. Uczestnik otrzymuje:

3 punkty – gdy poprawnie rozwiąże zadanie i zapisze, że ostateczna cena laptopa to 2508 zł.

2 punkty – gdy wyznaczając ostateczną cenę laptopa poprawnie zapisze ostateczną cenę laptopa równą $0{,}95 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}1 \cdot 3000\ zł$ i na tym zakończy lub popełni błędy rachunkowe.

1 punkt – gdy wyznaczając ostateczną cenę laptopa poprawnie zapisze ostateczną cenę laptopa równą $95\% \cdot 80\% \cdot 110\% \cdot 3000\ zł$ i na tym zakończy lub popełni błędy przy zamianie procentów na ułamki.

0 punktów – gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania**.**

Zadanie 25. (3 p.)

Wykaż, że suma liczb trzycyfrowych postaci XYZ+ZXY+YZX, jest podzielna przez 111, wiedząc, że X, Y, Z oznaczają dowolne cyfry i są różne od zera.

Przykładowe rozwiązanie

Liczbę XYZ możemy zapisać w postaci 100X+10Y+Z,

Liczbę ZXY możemy zapisać w postaci 100Z+10X+Y.

Liczbę YZX możemy zapisać w postaci 100Y+10Z+X.

Zatem sumę liczb XYZ, ZXY, YZX możemy zapisać w postaci:

XYZ+ZXY+YZX=100X+10Y+Z+100Z+10X+Y+100Y+10Z+X=111X+111Y+111Z=111(X+Y+Z), czyli jest iloczynem liczby 111 i liczby całkowitej (X+Y+Z), co dowodzi, że suma XYZ+ZXY+YZX jest podzielna przez 111.

Schemat oceniania. Uczestnik otrzymuje:

3 punkty – gdy poprawnie przeprowadzi rozumowanie, że XYZ+ZXY+YZX jest podzielna przez 111.

2 punkty – gdy zapisze, że XYZ+ZXY+YZX=100X+10Y+Z+100Z+10X+Y+100Y+10Z+X i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**

gdy zapisze, że XYZ+ZXY+YZX=111X+111Y+111Z i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

1 punkt – gdy zapisze poprawnie przynajmniej jedną z liczb

XYZ = 100X+10Y+Z **lub** ZXY = 100Z+10X+Y **lub** YZX = 100Y+10Z+X i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

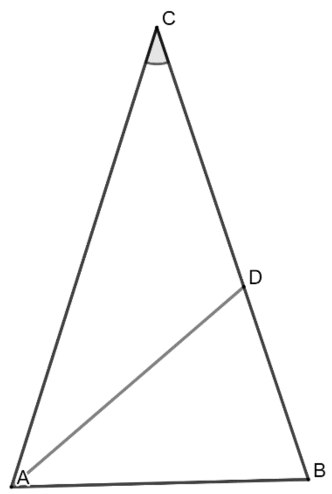
0 punktów – gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania**.**

Uwagi:

- Jeśli uczestnik zapisze liczbę w postaci 111(X+Y+Z) i na tym zakończy to otrzymuje **3 punkty.**
- Jeśli uczestnik podzieli liczbę 111X+111Y+111Z przez 111 i otrzyma w wyniku dzielenia liczbę postaci X+Y+Z i na tym zakończy to otrzymuje **3 punkty.**
- Uczestnik nie musi pisać komentarza, że liczba X+Y+Z jest całkowita.

Zadanie 26. (4 p.)

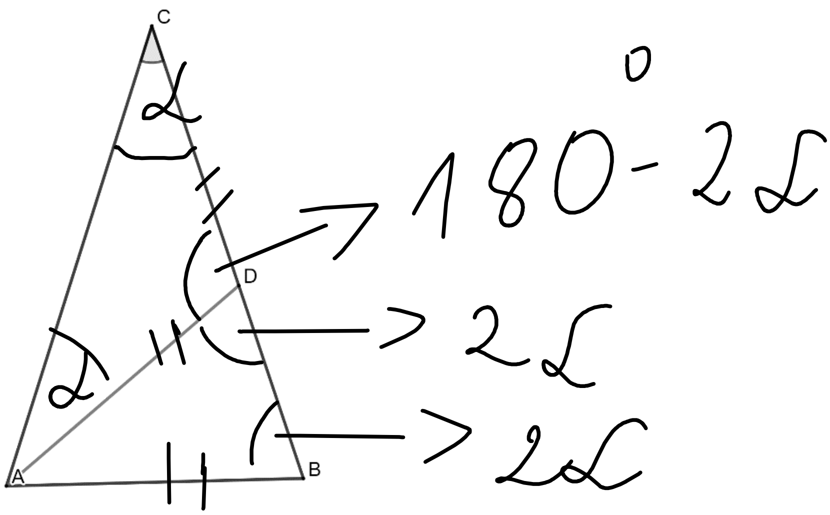
W trójkącie równoramiennym ABC, w którym AC=BC, na ramieniu BC zaznaczono punkt D i poprowadzono odcinek AD. W ten sposób rozcięto trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramienne CAD i BDA tak, że AB=AD=CD. Kąt ACB oznacz $\propto$. Wyznacz miarę kąta $\propto$.



Przykładowe rozwiązania

I metoda

Rysunek pomocniczy:



1. Niech kąt $\measuredangle ACB = \alpha$.
2. Trójkąt ADC jest równoramienny zatem:
   $\measuredangle ACD = \measuredangle CAD = \alpha,$ z rachunku kątów w trójkącie ADC $\measuredangle ADC = 180^{\circ} - 2\alpha$.
3. Kąt $\measuredangle ADB$ *jest kątem przyległym do kąta* $\measuredangle ADC$.

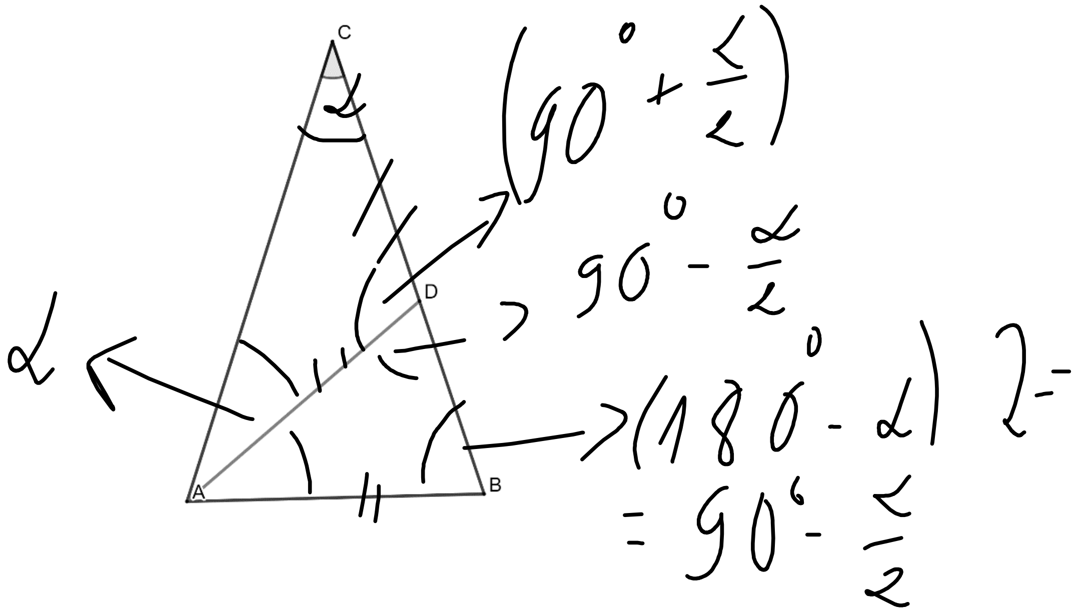
   $Zatem\ \measuredangle ADB = 180^{\circ} - (180^{\circ} - 2\alpha) = 2\alpha.$

4. Trójkąt ADB jest równoramienny zatem $\measuredangle ADB = \measuredangle ABD = 2\alpha$
5. Trójkąt ABC jest równoramienny zatem : $\measuredangle ABC = \measuredangle BAC = 2\alpha$ i $\measuredangle ACB = \alpha$.
6. Z rachunku kątów w trójkącie ABC możemy zapisać równanie:

$$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^{\circ}$$
$$5\alpha = 180^{\circ}$$
$$\alpha = 36^{\circ}$$

<u>*II metoda*</u>

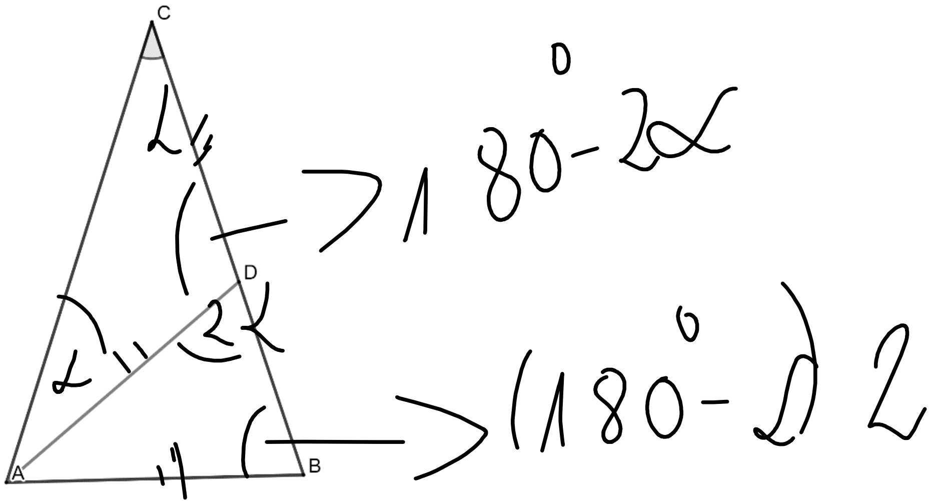
Rysunek pomocniczy:



1. Niech kąt $\measuredangle ACB = \alpha$.
2. Trójkąt ABC jest równoramienny, gdzie AC=BC zatem:
$$\measuredangle ABC = \measuredangle BAC = (180^{\circ} - \alpha) : 2 = 90^{\circ} - \frac{\alpha}{2},$$
3. Trójkąt ABD jest równoramienny, gdzie AB=AD zatem:
$$\measuredangle ABD = \measuredangle ADB = 90^{\circ} - \frac{\alpha}{2}$$
4. *kąt $\measuredangle ADC$ jest kątem przyległym do kąta $\measuredangle ADB$, zatem*
$$\measuredangle ADC = 180^{\circ} - \left(90^{\circ} - \frac{\alpha}{2}\right) = 90^{\circ} + \frac{\alpha}{2}$$
5. Trójkąt ADC jest równoramienny, gdzie AD=DC zatem:
$$\measuredangle ACD = \measuredangle DAC = \alpha$$
6. Z rachunku kątów w trójkącie ADC możemy zapisać równanie:
$$\alpha + \alpha + 90^{\circ} + \frac{\alpha}{2} = 180^{\circ}$$
$$2{,}5\alpha = 90^{\circ}$$
$$\alpha = 36^{\circ}$$

III metoda

Rysunek pomocniczy:



1. Niech kąt $\sphericalangle ACB = \alpha$.
2. Trójkąt ABC jest równoramienny, gdzie AC=BC zatem:
$$\sphericalangle ABC = (180^\circ - \alpha) : 2 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$
3. Trójkąt ACD jest równoramienny, gdzie DC=AD zatem:
$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle DAC = \alpha$$
4. Z rachunku kątów w trójkącie ADC $\sphericalangle ADC = 180^\circ - 2\alpha$
5. Kąt $\sphericalangle$ADB jest kątem przyległym do kąta $\sphericalangle ADC$, zatem
$$\sphericalangle ADB = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha$$
6. Trójkąt ADB jest równoramienny, gdzie AD=AB zatem:$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ABD, czyli$ możemy zapisać równanie:
$$2\alpha = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$
$$2{,}5\alpha = 90^\circ$$
$$\alpha = 36^\circ$$

Schemat oceniania I, II i III metody. Uczestnik otrzymuje:

4 punkty – gdy poprawnie wyznaczy, że $\alpha = 36^\circ$.

3 punkty – gdy zapisze poprawne równanie, z którego można wyznaczyć miarę kąta α np.:

$5\alpha = 180^\circ$ **lub** $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ$ **lub** $\alpha + 180^\circ - 4\alpha = 2\alpha$ **lub** $2\alpha = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ **lub**

$2{,}5\alpha = 90^\circ$ **lub** $\alpha + \alpha + 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ$ **lub** $\alpha + \alpha = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ **lub** $90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \alpha = \alpha$ **lub** zapisze inne poprawne równanie, z którego można wyznaczyć miarę kąta α i na tym zakończy lub dalej popełni błędy**.**

2 punkty – gdy zapisze, że:

- $\measuredangle ADB = \measuredangle ABD = 2\alpha$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- $\measuredangle ABD = 2\alpha$ i $\measuredangle ABD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- $\measuredangle CAD = \alpha\ i\ \measuredangle ADC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- $\measuredangle ABD = \measuredangle BDA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}\ i\ \measuredangle BAD = 90^\circ - \frac{3\alpha}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- $\measuredangle ABC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}\ i\ \measuredangle BAC = 2\alpha$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**

1 punkt – gdy zapisze, że

- $\measuredangle ACD = \measuredangle CAD = \alpha$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- $\measuredangle ABC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- $\measuredangle ADB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- $\measuredangle ABC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ **lub**
- $\measuredangle BAC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ **lub**
- $\measuredangle ADC = 180^\circ - 2\alpha$ **lub**
- $\measuredangle ADB = 2\alpha$ **lub**
- wyznaczy miarę jednego, z kątów:$\measuredangle ABC\ lub\ \measuredangle BAC\ lub\ \measuredangle BAD\ lub\ \measuredangle DAC\ lub\ \measuredangle BDA\ lub\ \measuredangle BAD\ lub\ \measuredangle ADC$ przy pomocy kąta α i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

0 punktów – gdy rozwiązanie jest błędne lub jest brak rozwiązania**.**

Uwaga! Akceptujemy rozwiązanie przeprowadzone na rysunku. Wystarczy, że uczestnik poprawnie zaznaczy na rysunku odpowiednie kąty i ich miary oraz zapisze i rozwiąże poprawne równanie pozwalające na wyznaczenie miary kąta $\alpha = 36^\circ$.

Wojewódzki Konkurs Matematyczny – stopień szkolny 2020/2021
dla uczniów szkół podstawowych województwa wielkopolskiego
„Myślę, działam, odkrywam, tworzę”

Login uczestnika

Pieczęć szkoły

……………………………………………………

Data urodzenia uczestnika

Dzień Miesiąc Rok

Karta odpowiedzi zadań nr 24, 25 i 26 testu internetowego

Zadanie 24 (3 p.) Liczba uzyskanych punktów: ____/ **3**

Zadanie 25 (3 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ____/ **3**

Podpis sprawdzającego (imieniem i nazwiskiem): ………………………………………………………………………………………

Zadanie 26 (4 p.) Liczba uzyskanych punktów: ____/ **4**

Podpis sprawdzającego (imieniem i nazwiskiem): ……………………………………………………………………………………

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Podpis sprawdzającego (imieniem i nazwiskiem): ………………………………………………………………………………………

Login uczestnika	Pieczęć szkoły	Data urodzenia uczestnika
		Dzień Miesiąc Rok

………………………………………………

Wojewódzki Konkurs Matematyczny

dla uczniów szkół podstawowych województwa wielkopolskiego

Stopień rejonowy – rok szkolny 2020/2021

Myślę, działam, odkrywam, tworzę

Instrukcja dla uczestnika

1. Sprawdź, czy test zawiera **15 stron**. Ewentualny brak stron lub inne usterki zgłoś Komisji Konkursowej przed rozpoczęciem konkursu.
2. Czytaj uważnie wszystkie teksty i zadania. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra piszącego czarnym lub niebieskim kolorem. Nie używaj korektora.
3. Test, do którego przystępujesz, zawiera **24 zadania**. Wśród nich są zadania zamknięte, zadania typu prawda fałsz oraz zadania otwarte wymagające krótszej lub dłuższej odpowiedzi. Zadania zamknięte to zadania od 1 do 18. Zadania prawda - fałsz to zadania 19 i 20.
4. W każdym **zadaniu zamkniętym** wybierz tylko **jedną odpowiedź** i zamaluj długopisem/piórem odpowiednią kratkę na karcie odpowiedzi, np. gdy wybrałeś odpowiedź „**A**”:

A	B	C	D

   Jeśli się pomylisz, błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz inną odpowiedź, np.:

A	B	C	D

   Za każdą poprawnie udzieloną odpowiedź otrzymasz jeden punkt, a za odpowiedzi błędne lub brak odpowiedzi – zero punktów.
5. W zadaniach **prawda – fałsz** oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe, np. gdy wybrałeś odpowiedź „**P**”:

P	F

   Jeśli się pomylisz, błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz inną odpowiedź, np.:

P	F
6. W zadaniach **otwartych** zapisz rozwiązania starannie i czytelnie w miejscach wyznaczonych przy poszczególnych zadaniach. Pamiętaj, że pominięcie uzasadnienia lub części obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów. Pomyłki przekreślaj (nie stosuj korektora).
7. Rozwiązując zadania, możesz korzystać z przyborów geometrycznych (linijki i cyrkla) oraz ze strony oznaczonej jako **brudnopis**. Zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
8. Podczas trwania konkursu nie możesz korzystać z żadnych pomocy naukowych (w tym również kalkulatora i urządzeń elektronicznych) oraz podpowiedzi kolegów – narażasz ich i siebie na dyskwalifikację. Nie wolno Ci również zwracać się z jakimikolwiek wątpliwościami do Komisji.
9. Za rozwiązanie całego testu możesz otrzymać maksymalnie **40 punktów**. Do stopnia wojewódzkiego zakwalifikują się uczestnicy, którzy zdobędą co najmniej **85% punktów, czyli 34 punkty.**
10. Na udzielenie odpowiedzi masz **90 minut.**

Życzymy Ci powodzenia!

Wypełnia Komisja Konkursowa (po rozkodowaniu pracy)

…………………………………………………………………

Imię i nazwisko uczestnika **Liczba uzyskanych punktów** ……… **/ 40**

Zadanie 1. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Iloraz $\frac{\sqrt[3]{27+5}}{\sqrt[3]{8-12}}$ jest równy:

A. 2 B. -2 C. $\sqrt[3]{28}$ D. 8

Zadanie 2. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie ma miarę o 15° większą niż kąt między ramionami. Kąt między ramionami wynosi:

A. 90° B. 55° C. 70° D. 50°

Zadanie 3. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Basia i Kasia postanowiły zmierzyć długość placu zabaw za pomocą swoich kroków (idąc tą samą trasą). Basia stawia kroki o długości 48 cm, a Kasia o długości 40 cm.
Jakiej długości jest plac zabaw, który mierzą, jeśli ślady stóp dziewczynek pokryły się 18 razy, nie licząc linii startu (ostatni raz na linii końcowej placu zabaw)?

A. więcej niż 44 m B. mniej niż 43 m C. ponad 50 m D. co najmniej 43 m

Zadanie 4. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

O godzinie 19^{20} kąt wypukły między wskazówkami minutową i godzinową wynosi:

A. 90° B. 100° C. 120° D. 110°

Zadanie 5. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Liczby naturalne dodatnie ustawiamy kolejno po sobie tworząc liczbę 1234567891011121314151617181920212223…. Na setnym miejscu będzie znajdowała się cyfra:

A. 2 B. 1 C. 5 D. 0

Zadanie 6. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Liczba $2^{30} + 2^{30} + 2^{32} + 2^{31}$ jest równa:

A. 2^{123} B. 2^{33} C. 16^{123} D. 8^{32}

Zadanie 7. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Długości boków trójkąta równobocznego powiększono o 30%. Pole trójkąta zwiększyło się o:

A. 30% B. 60% C. 130% D. 69%

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Zadanie 8. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Akwarium w kształcie prostopadłościanu ma wymiary 20 cm x 3 dm x 0,4 m i jest w 80% wypełnione wodą. Ile litrów wody jest w tym akwarium?

A. $19{,}2\ l$ B. $19{,}6\ l$ C. $18{,}6\ l$ D. $18{,}2\ l$

Zadanie 9. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

W pudełku znajdują się 3 kule zielone, 4 niebieskie i 5 czerwonych. Losujemy jedną kulę. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli niebieskiej lub zielonej wynosi:

A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{7}{12}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{7}$

Zadanie 10. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Melania kupiła arbuz, którego waga jest o $\frac{4}{5}$ kg większa od $\frac{4}{5}$ tego arbuza. Wynika z tego, że arbuz który kupiła Melania waży:

A. 2 kg B. 1,8 kg C. 4 kg D. ponad 4 kg

Zadanie 11. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Średnia arytmetyczna wyników 2, 4, 6 ulegnie zmianie, gdy dopisze się do nich następujące wyniki:

A. 1 i 7 B. 3 i 5 C. 3 i 4 D. 6 i 2

Zadanie 12. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

W trapezie prostokątnym ABCD o kącie ostrym 60^0, krótsza podstawa ma długość 4, a druga podstawa jest od niej dwa razy dłuższa. Zatem pole trapezu jest równe:

A. $24\sqrt{3}$ B. $36\sqrt{3}$ C. $48\sqrt{3}$ D. $60\sqrt{3}$

Zadanie 13. (1 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Samochód pana Michała spala średnio 4 litry na 100 km. Między miejscem zamieszkania pana Michała a miejscowością jego wypoczynku nad morzem na mapie w skali 1:500000 jest odcinek długości 24 cm. Pan Michał potrzebuje więc na przejazd nad morze i z powrotem:

A. około 6 litrów paliwa B. 8,8 litra paliwa

C. co najwyżej 8 litrów paliwa D. więcej niż 9 litrów paliwa

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Zadanie 14. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Dane są dwie sumy algebraiczne $3a^3 - 2a$ oraz $-3a^2 - 2$. Iloczyn tych sum jest równy:

A. $-9a^5 + 4a$

B. $-9a^6 + 6a^3 - 6a^2 + 4a$

C. $-9a^5 + 6a^3 - 6a^2 + 4a$

D. $-9a^6 + 4a$

Zadanie 15. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Liczba trzycyfrowa, w której cyfra dziesiątek jest równa a, cyfra jedności jest dwa razy większa niż cyfra dziesiątek, a cyfra setek jest o 1 mniejsza od cyfry jedności, ma postać:

A. 112a

B. 212a – 100

C. 112a + 100

D. 112a – 100

Zadanie 16. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Długość przekątnej sześcianu jest równa 9. Stąd wynika, że pole całkowite tego sześcianu jest równe:

A. 243

B. 81

C. 162

D. 108

Zadanie 17. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Na parkingu mającym 30 miejsc, wszystkie miejsca są zajęte przez Fordy lub przez czarne samochody. Jest tam 17 Fordów i 18 czarnych samochodów. Nieprawdą jest, że liczba czarnych Fordów jest:

A. nieparzysta

B. większa od 3

C. mniejsza od 6

D. równa 7

Zadanie 18. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Odległość z miasta A do miasta B samochód, który jedzie ze średnią prędkością 120 $\frac{km}{h}$, pokonuje w 20 minut. Jeżeli samochód zmniejszy swoją średnią prędkość do 80 $\frac{km}{h}$, to czas przejazdu na tej samej trasie wydłuży się o:

A. 20 minut

B. 10 minut

C. 15 minut

D. 30 minut

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Zadania otwarte

Zadanie 19. (3 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Boki trójkąta *ABC* mają długości: 5 cm, 12 cm i 13 cm. Pole tego trójkąta jest równe polu prostokąta *KLMN*, którego bok *KL* ma długość równą 5 cm.

Określ prawdziwość zdań, zaznaczając P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub zaznaczając F, jeśli zdanie jest fałszywe.

Trójkąt *ABC* jest prostokątny.	P	F
Pole trójkąta *ABC* jest równe 60 cm^2.	P	F
Bok *NK* prostokąta ma długość równą 6 cm.	P	F

Zadanie 20. (3 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Suma dwóch liczb jest równa 30, a różnica podwojonej drugiej z nich i połowy pierwszej wynosi 20. Określ prawdziwość zdań, zaznaczając P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub zaznaczając F, jeśli zdanie jest fałszywe.

Większa z tych liczb jest podzielna przez 4.	P	F
Wartość bezwzględna z różnicy tych liczb jest liczbą pierwszą.	P	F
Co najmniej jedna z tych liczb jest mniejsza od 14.	P	F

Zadanie 21. (3 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Wykaż, że suma czterech kolejnych liczb naturalnych parzystych przy dzieleniu przez 8 daje resztę 4.

Zadanie 22. (4 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **4**

Stosunek obwodów dwóch kwadratów jest równy 3:4. Oblicz długość boku każdego z kwadratów, jeżeli wiadomo, że suma pól tych kwadratów jest równa 100 cm^2.

Zadanie 23. (5 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **5**

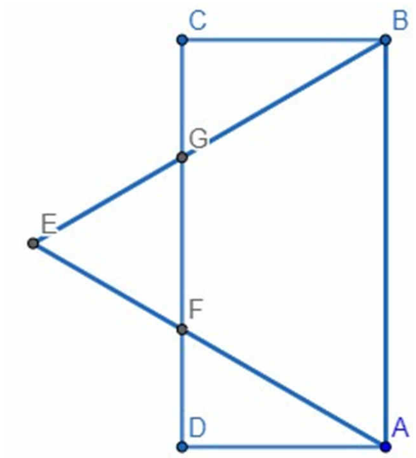
Zmieszano 10 - procentowy roztwór soli z 2 - procentowym roztworem soli i otrzymano 30 kg roztworu soli. Oblicz stężenie otrzymanego roztworu, wiedząc, że gdyby roztworu 10 - procentowego było o 20% więcej, a roztworu 2 - procentowego o 20% mniej, to końcowy roztwór miałby stężenie 8%.

Zadanie 24. (4 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **4**

Oblicz pole trójkąta *EFG*, wiedząc, że czworokąt *ABCD* jest prostokątem, w którym

$|AB| = \ 30\ cm, |BC| = 15\ cm$ i trójkąt *ABE* jest równoboczny.

Wynik doprowadź do najprostszej postaci.



Brudnopis (nie podlega ocenie)

Karta odpowiedzi zadań zamkniętych

Login uczestnika

Data urodzenia uczestnika

Dzień Miesiąc Rok

Numer zadania	Odpowiedzi	Liczba punktów
1.	A B C D	
2.	A B C D	
3.	A B C D	
4.	A B C D	
5.	A B C D	
6.	A B C D	
7.	A B C D	
8.	A B C D	
9.	A B C D	
10.	A B C D	
11.	A B C D	
12.	A B C D	
13.	A B C D	
14.	A B C D	
15.	A B C D	
16.	A B C D	
17.	A B C D	
18.	A B C D	

Wypełnia Komisja Konkursowa	
Liczba punktów za zadania zamknięte:	
Liczba punktów za zadania otwarte:	
Suma wszystkich punktów:	

Wypełnia Komisja Konkursowa

Suma uzyskanych punktów: ....

....

Podpis nauczyciela oceniającego (imieniem i nazwiskiem)

ZASADY OCENIANIA

1. Klucz punktowania zadań zamkniętych (zadania nr 1 - 18).

Za każdą poprawną odpowiedź uczestnik konkursu otrzymuje 1 punkt.

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Poprawna odpowiedź	B	D	D	B	C	B	D	A	B	C	C	A	D	A	B	C	D	B

2. Przykładowe rozwiązania i schemat oceniania zadań P/F (zadania nr 19 i 20).

Za każdą poprawną odpowiedź przyznaje się jeden punkt. Uczestnik w tych dwóch zadaniach nie musi przedstawiać rozwiązania. Punktowane są jedynie zaznaczone odpowiedzi w tabeli.

Punktacja:

3 punkty – gdy wszystkie odpowiedzi są poprawne,
2 punkty – gdy dwie odpowiedzi są poprawne,
1 punkt – gdy jedna odpowiedź jest poprawna,
0 punktów – gdy wszystkie odpowiedzi są błędne

Zadanie 19. (3 p.)

Trójkąt ABC jest prostokątny.	**P**	F
Pole trójkąta ABC jest równe 60 cm^2.	P	**F**
Bok NK prostokąta ma długość równą 6 cm.	**P**	F

Przykładowe rozwiązanie

1. Boki trójkąta *ABC* mają długości: 5 cm, 12 cm i 13 cm.

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa
$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 \ i \ 13^2 = 169$ zatem $5^2 + 12^2 = 13^2$,
czyli trójkąt ABC jest prostokątny.
Trójkąt ABC jest prostokątny. – Zdanie prawdziwe

2. $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5\ cm \cdot 12\ cm = 30\ cm^2$

Pole trójkąta ABC jest równe 60 cm^2. – Zdanie fałszywe

3. $P_{KLMN} = P_{ABC}$
$|KL| \cdot |NK| = 30\ cm^2$
$5\ cm \cdot |NK| = 30\ cm^2$
$|NK| = 6\ cm$

Bok NK prostokąta ma długość równą 6 cm. – Zdanie prawdziwe

Zadanie 20. (3 p.)

Większa z tych liczb jest podzielna przez 4	P	F
Wartość bezwzględna z różnicy tych liczb jest liczbą pierwszą.	P	F
Co najmniej jedna z tych liczb jest mniejsza od 14.	P	F

Przykładowe rozwiązanie

x – pierwsza liczba y – druga liczba

$x + y = 30 \; i \; 2y - \frac{1}{2}x = 20$

$\begin{cases} x + y = 30 \\ -x + 4y = 40 \end{cases}$

$5y = 70$

$y = 14 \; i \; x = 16$

Większa z tych liczb wynosi 16. Liczba 16 jest podzielna przez 4.

1. Większa z tych liczb jest podzielna przez 4. – Zdanie prawdziwe
2. $|16 - 14| = |2| = 2$

Wartość bezwzględna z różnicy tych liczb jest liczbą pierwszą. – Zdanie prawdziwe

3. Co najmniej jedna z tych liczb jest mniejsza od 14. – Zdanie fałszywe.

3. Przykładowe rozwiązania i schemat oceniania zadań otwartych (zadania nr 21 – 24).

Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania nieuwzględnione w schemacie punktowania przyznajemy maksymalną liczbę punktów należnych za to zadanie.

UWAGA! Od uczestnika nie jest wymagana wyraźnie sformułowana odpowiedź słowna ona końcu zadania. Wystarczy, że uczestnik wyznaczy, obliczy szukaną wartość, bądź przeprowadzi argumentację w zadaniu na dowodzenie.

Zadanie 21. (3 p.)

Wykaż, że suma czterech kolejnych liczb naturalnych parzystych przy dzieleniu przez 8 daje resztę 4.

Przykładowe rozwiązanie

Założenie: $2n, 2n + 2, 2n + 4, 2n + 6$;

to cztery kolejne liczby naturalne parzyste, dla n należących do naturalnych.

Teza: $2n + (2n + 2) + (2n + 4) + (2n + 6) -$

$\text{liczba, która przy dzieleniu przez 8 daje resztę 4}$

Dowód:

$2n + (2n + 2) + (2n + 4) + (2n + 6) = 8n + 12 = 8n + 8 + 4 = 8(n + 1) + 4$

Otrzymana liczba $8(n + 1) + 4$ z dzielenia przez 8 daje resztę 4, ponieważ jest sumą liczby podzielnej na 8 i liczby 4.

Zasady punktacji.

Uczestnik otrzymuje:

3 punkty - gdy poprawnie uzasadni, że otrzymana suma przy dzieleniu przez 8 daje resztę 4

Uwagi:

Uczestnik nie musi doprowadzić otrzymanej sumy: $8n + 12$ do postaci $8(n + 1) + 4$:

- Uczestnik może zapisać komentarz słowny, np. liczba 8n jest podzielna przez 8, a liczba 12 z dzielenia przez 8 daje resztę 4. Zatem $8n + 12$ z dzielenia przez 8 daje resztę 4 **lub**
- Uczestnik może otrzymaną sumę $8n + 12$ zapisać w postaci 8n +8 +4 i na tym zakończyć dowód.

2 punkty – gdy

- zapisze symbolicznie **wszystkie 4 kolejne** liczby naturalne parzyste np.: $2n, 2n + 2, 2n + 4, 2n + 6$; gdzie n jest liczbą naturlaną i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze otrzymaną sumę w postaci $8n + 12$, gdzie n jest liczbą naturlaną i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

1 punkt – gdy zapisze symboliczne przynajmniej jedną liczbę naturalną parzystą np.:
$2n$ lub $2n + 2$ lub $2n + 4$ lub $2n + 6$, gdzie n jest liczbą naturalną i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

0 punktów - rozwiązanie błędne, brak rozwiązania, dowód na konkretnym przykładzie, bądź kilka dowodów na konkretnych przykładach.

Uwaga:

W rozwiązaniu zadania uczestnik może pominąć zapis, że n jest liczbą naturalną.

Zadanie 22. (4 p.)

Stosunek obwodów dwóch kwadratów jest równy 3:4. Oblicz długość boku każdego z kwadratów, jeżeli wiadomo, że suma pól tych kwadratów jest równa 100 cm^2.

Przykładowe rozwiązania

Sposób I

a – długość boku pierwszego kwadratu
b – długość boku drugiego kwadratu
O_1 – obwód pierwszego kwadratu
O_2- obwód drugiego kwadratu
P_1 -pole pierwszego kwadratu
P_2 -pole drugiego kwadratu

Dane:

$$\frac{O_1}{O_2} = \frac{3}{4} \ i \ P_1 + P_2 = 100 \ cm^2$$

$$O_1 = 4a \ i \ O_2 = 4b$$

$$\frac{4a}{4b} = \frac{3}{4} \quad zatem \ \frac{a}{b} = \frac{3}{4}, czyli \ a = 3x \ i \ b = 4x, gdzie \ x > 0$$

$P_1 + P_2 = 100\ cm^2$
$a^2 + b^2 = 100\ cm^2$
$(3x)^2 + (4x)^2 = 100\ cm^2$
$9x^2 + 16x^2 = 100\ cm^2$
$25x^2 = 100\ cm^2$
$x^2 = 4\ cm^2$
$x = 2\ cm$
$a\ =\ 3x = 6cm\ i\ b = 4x = 8cm$
Długości boków kwadratów wynoszą odpowiednio 6 cm i 8 cm.

Sposób II

a – długość boku pierwszego kwadratu
b – długość boku drugiego kwadratu
O_1 – obwód pierwszego kwadratu
O_2- obwód drugiego kwadratu
P_1 -pole pierwszego kwadratu
P_2 -pole drugiego kwadratu

Dane:
$\frac{O_1}{O_2} = \frac{3}{4}\ i\ P_1 + P_2 = 100\ cm^2\ O_1 = 4a\ i\ O_2 = 4b$
$\frac{4a}{4b} = \frac{3}{4}\quad zatem\ \frac{a}{b} = \frac{3}{4}, czyli\ a = \ \frac{3}{4}b, gdzie\ b > 0\ i\ a > 0$
$P_1 + P_2 = 100\ cm^2\ a^2 + b^2 = 100\ cm^2$
$(\frac{3}{4}b)^2 + b^2 = 100\ cm^2$
$\frac{9}{16}b^2 + b^2 = 100\ cm^2$
$\frac{25}{16}b^2 = 100\ cm^2$
$b^2 = \frac{1600}{25}\ cm^2$
$b^2 = 64\ cm^2$
$b = 8\ cm$
$a = \ \frac{3}{4}b = 6cm\ i\ b = 8cm$
Długości boków kwadratów wynoszą odpowiednio 6 cm i 8 cm.

Zasady punktacji.
Uczestnik otrzymuje:
4 punkty – gdy

- poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że długości boków kwadratów wynoszą odpowiednio 6 cm i 8 cm. **lub**
- poda odpowiedź, że długości boków kwadratów wynoszą odpowiednio 6 cm i 8 cm, ale sprawdzi, że otrzymane liczby spełniają <u>wszystkie</u> warunki zadania.

3 punkty – gdy

- rozwiązując równanie $(3x)^2 + (4x)^2 = 100$ poprawnie wyznaczy $x = 2cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- rozwiązując równanie $(\frac{3}{4}b)^2 + b^2 = 100$ poprawnie wyznaczy $b = 8\ cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- rozwiązując równanie $a^2 + (\frac{4}{3}a)^2 = 100$ poprawnie wyznaczy $a = 6\ cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**

2 punkty – gdy otrzyma poprawne równanie z jedną niewiadomą np.:

$(3x)^2 + (4x)^2 = 100$ lub $(\frac{3}{4}b)^2 + b^2 = 100$ lub $a^2 + (\frac{4}{3}a)^2 = 100$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

1 punkt - gdy

- poprawnie ułoży układ równań np. :$\begin{cases} \frac{4a}{4b} = \frac{3}{4} \\ a^2 + b^2 = 100 \end{cases}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

  lub
- poprawnie ułoży układ równań np. :$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{3}{4} \\ a^2 + b^2 = 100 \end{cases}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

  lub
- poprawnie ułoży jedno równanie z dwiema niewiadomymi np.: $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ lub $a = \frac{3}{4}$ b lub $b = \frac{4}{3}a$ lub $a^2 + b^2 = 100$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze zależność, $że\ a = 3x\ i\ b = 4x, gdzie\ x\ > 0$, i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poda tylko odpowiedź, że długości boków kwadratów wynoszą odpowiednio 6 cm i 8 cm, bez żadnego sprawdzenia warunków zadania i bez zapisywania układu równań lub równania.

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Uwaga!
W rozwiązaniu zadania uczestnik może pominąć zapis, że $a > 0, b > 0\ i\ x > 0$.
W rozwiązaniu zadania uczestnik może zaznaczyć dane i szukane np. na rysunku pomocniczym.

Zadanie 23. (5 p.)

Zmieszano 10 - procentowy roztwór soli z 2 - procentowym roztworem soli i otrzymano 30 kg roztworu soli. Oblicz stężenie otrzymanego roztworu, wiedząc, że gdyby roztworu 10 - procentowego było o 20% więcej, a roztworu 2- procentowego o 20% mniej, to końcowy roztwór miałby stężenie 8%.

Przykładowe rozwiązania

Sposób I

1. x - masa 10 % roztworu soli
   y - masa 2% roztworu soli

$x + y = 30$ – masa roztworu po zmieszaniu w pierwszej wersji

$10\%x + 2\%y$ – masa soli po zmieszaniu w pierwszej wersji

2. $120\%x + 80\%y$– masa roztworu po zmieszaniu w drugiej wersji

$10\% \cdot 120\%x + 2\% \cdot 80\%y -$ masa soli po zmieszaniu w drugiej wersji

$8\% \cdot (120\%x + 80\%y)$ - –masa soli po zmieszaniu w drugiej wersji

$10\% \cdot 120\%x + 2\% \cdot 80\%y = 8\% \cdot (120\%x + 80\%y)$

3. $\begin{cases} x + y = 30 \\ 10\% \cdot 120\%x + 2\% \cdot 80\%y = 8\% \cdot (120\%x + 80\%y) \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 30 \\ 0{,}1 \cdot 1{,}2x + 0{,}02 \cdot 0{,}8y = 0{,}08 \cdot (1{,}2x + 0{,}8y) \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 30 \\ 0{,}12x + 0{,}016y = 0{,}096x + 0{,}064y \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 30 \\ 0{,}12x - 0{,}096x = 0{,}064y - 0{,}016y \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 30 \\ 0{,}024x = 0{,}048y \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 30 \\ x = 2y \end{cases}$

$2y + y = 30$

$3y = 30$

$y = 10$

$\begin{cases} y = 10 \\ x = 2y = 20 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 20 \text{ kg} - \text{masa } 10\% \text{ roztworu soli} \\ y = 10 \text{ kg} - \text{masa } 2\% \text{ roztworu soli} \end{cases}$

$10\%x + 2\% \cdot y = 0{,}1 \cdot 20\ kg + 0{,}02 \cdot 10\ kg = 2kg + 0{,}2\ kg = 2{,}2kg$ – masa soli po zmieszaniu w pierwszej wersji

$C_p = \frac{2{,}2\ kg}{30\ kg} \cdot 100\% = \frac{22}{300} \cdot 100\% = \frac{22}{3}\% = 7\frac{1}{3}\%$

Stężenie otrzymanego roztworu soli wynosi $7\frac{1}{3}\%$.

Sposób II

$x - \ masa\ 10\ \%\ roztworu\ soli$

$(30 - x) - \ masa\ 2\%\ roztworu\ soli$

$10\%x + 2\% \cdot (30 - x)$ – masa soli po zmieszaniu w pierwszej wersji

$120\%x + 80\%(30 - x)$ – masa roztworu po zmieszaniu w drugiej wersji

$10\% \cdot 120\%x + 2\% \cdot 80\%(30 - x)$ – masa soli po zmieszaniu w drugiej wersji

$$\frac{10\% \cdot 120\%x + 2\% \cdot 80\%(30 - x)}{120\%x + 80\%(30 - x)} \cdot 100\% = 8\%$$

$$\frac{0{,}1 \cdot 1{,}2x + 0{,}02 \cdot 0{,}8(30 - x)}{1{,}2x + 0{,}8(30 - x)} = 0{,}08$$

$$\frac{0{,}12x + 0.016(30 - x)}{1{,}2x + 0{,}8(30 - x)} = 0{,}08$$

$$\frac{0{,}12x + 0{,}48 - 0.016x}{1{,}2x + 24 - 0{,}8x} = 0{,}08$$

$$\frac{0{,}104x + 0{,}48}{0{,}4x + 24} = 0{,}08$$
$$0{,}104x + 0{,}48 = 0{,}08(0{,}4x + 24)$$
$$0{,}104x + 0{,}48 = 0{,}032x + 1{,}92$$
$$0{,}104x - 0{,}032x = 1{,}92 - 0{,}48$$
$$0{,}072x = 1{,}44$$
$$x = 20$$
$$y = 10$$

$$\begin{cases} x = 20 \text{ kg} - \text{masa } 10\% \text{ roztworu soli} \\ y = 10 \text{ kg} - \text{masa } 2\% \text{ roztworu soli} \end{cases}$$

$10\%x + 2\%y$= $0{,}1 \cdot 20\ kg + 0{,}02 \cdot 10\ kg = 2kg + 0{,}2\ kg = 2{,}2kg$ – masa soli po zmieszaniu w pierwszej wersji

$$C_p = \frac{2{,}2\ kg}{30\ kg} \cdot 100\% = \frac{22}{300} \cdot 100\% = \frac{22}{3}\% = 7\frac{1}{3}\%$$

Stężenie otrzymanego roztworu soli wynosi $7\frac{1}{3}\%$.

Zasady punktacji.
Uczestnik otrzymuje:
5 punktów – gdy poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że stężenie otrzymanego roztworu soli wynosi $7\frac{1}{3}\%$. Uczestnik nie musi zapisywać wyniku w postaci ułamka mieszanego. Może zapisać, że stężenie otrzymanego roztworu soli wynosi $\frac{22}{3}\%$.
4 punkty – gdy
- poprawnie wyznaczy masę 10 % roztworu soli równą 20 kg i masę 2 % roztworu soli równą 10 kg i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie zapisze układ równań pozwalający wyznaczyć masę obu roztworów, ale rozwiązując układ równań popełni jeden błąd i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie **lub**
- poprawnie zapisze układ równań pozwalający wyznaczyć masę obu roztworów, poprawnie wyznaczy masę jednego z roztworów i błędnie drugiego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie **lub**
- poprawnie zapisze równanie pozwalające wyznaczyć masę jednego roztworów, ale popełni błąd rachunkowy rozwiązując to równanie i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie **lub**
- poprawnie zapisze i rozwiąże równanie pozwalające wyznaczyć masę jednego roztworów, ale popełni błąd rachunkowy wyznaczając masę drugiego z roztworów i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie.

3 punkty – gdy
- poprawnie zapisze układ równań pozwalający wyznaczyć masę obu roztworów, ale rozwiązując układ równań popełni błędy rachunkowe i konsekwentnie do popełnionych błędów rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie **lub**
- poprawnie zapisze równanie pozwalające wyznaczyć masę jednego roztworów, ale popełni błędy rozwiązując to równanie i konsekwentnie do popełnionych błędów rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie.

2 punkty – gdy

- poprawnie zapisze układ równań pozwalający wyznaczyć masę obu roztworów i na tym zakończy lub dalej popełni błędy inne niż opisane w sytuacjach powyżej **lub**
- poprawnie zapisze równanie pozwalające wyznaczyć masę jednego roztworów i na tym zakończy lub dalej popełni błędy inne niż opisane w sytuacjach powyżej **lub**
- poprawnie zapisze równanie $x + y = 30$, zapisze masę roztworu $120\%x + 80\%y$ po zmieszaniu w drugiej wersji oraz masę soli po zmieszaniu w drugiej wersji wynoszącą: np.: $8\% \cdot (120\%x + 80\%y)$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie zapisze równanie $x + y = 30$, zapisze masę roztworu $120\%x + 80\%y$ po zmieszaniu w drugiej wersji oraz masę soli po zmieszaniu w drugiej wersji wynoszącą: $10\% \cdot 120\%x + 2\% \cdot 80\%y$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, że masa soli po zmieszaniu w drugiej wersji jest równa $10\% \cdot 120\%x + 2\% \cdot 80\%(30 - x)$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, że masa soli po zmieszaniu w drugiej wersji jest równa $8\%(120\%x + 80\%(30 - x))$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- ułoży jedno równanie z dwiema niewiadomymi np.:

$$10\% \cdot 120\%x + 2\% \cdot 80\%y = 8\% \cdot (120\%x + 80\%y)$$

lub

$$\frac{10\% \cdot 120\%x + 2\% \cdot 80\%y}{120\%x + 80\%y} \cdot 100\% = 8\%$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

1 punkt – gdy

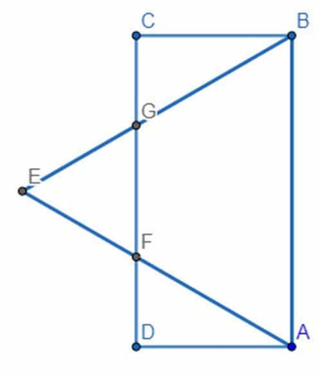
- ułoży równanie typu $x + y = 30$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, że masa soli po zmieszaniu w pierwszej wersji jest równa $10\%x + 2\%y$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze masę roztworu $120\%x + 80\%y$ po zmieszaniu w drugiej wersji i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, że masa soli po zmieszaniu w drugiej wersji jest równa $8\%(120\%x + 80\%y)$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, że masa soli po zmieszaniu w drugiej wersji jest równa $10\% \cdot 120\%x + 2\% \cdot 80\%y$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy**.**

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Uwaga!
W rozwiązaniu zadania uczestnik może zaznaczyć dane i szukane np. na rysunku pomocniczym.

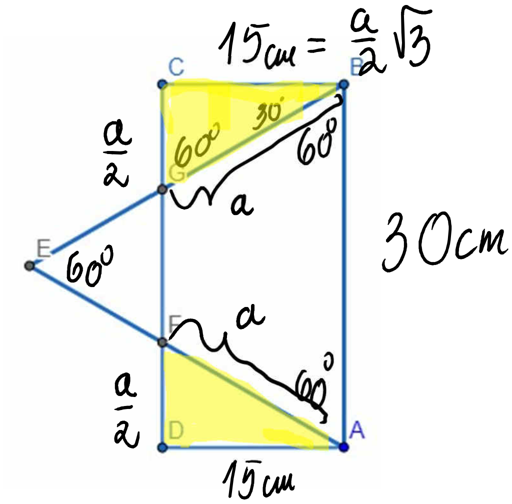
Zadanie 24. (4 p.)

Oblicz pole trójkąta EFG, wiedząc, że czworokąt ABCD jest prostokątem, w którym $|AB| = \ 30\ cm$, $|BC| = 15\ cm$ i trójkąt ABE jest równoboczny.
Wynik doprowadź do najprostszej postaci.



Przykładowe rozwiązania

Sposób I



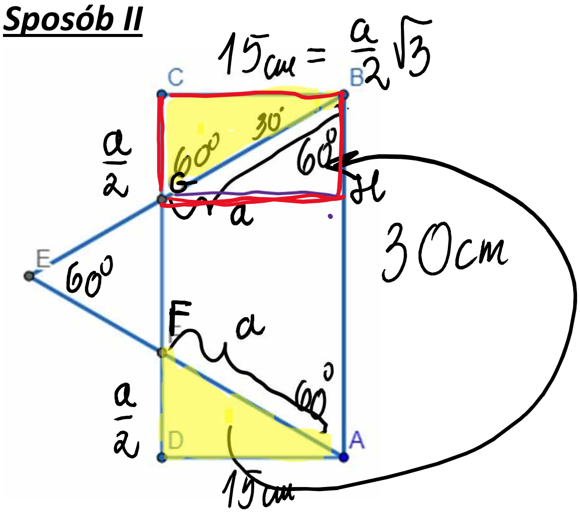
1. Zauważmy, że $P_{\Delta EFG} = P_{\Delta ABE} - P_{\mathrm{ABGF}}$
2. Trójkąt ABE to trójkąt równoboczny o boku 30 cm.
   $P_{\Delta ABE} = \frac{30^2\sqrt{3}}{4} cm^2 = \frac{900\sqrt{3}}{4} cm^2 = 225\sqrt{3}\, cm^2.$
3. $P_{\mathrm{ABGF}} = P_{\mathrm{ABCD}} - (P_{\mathrm{GBC}} + P_{\mathrm{ADF}})$
   $P_{\mathrm{GBC}} + P_{\mathrm{ADF}}$ *jest równe polu trójkąta równobocznego o wysokości* $15\ cm$
   Niech $|GB| = a$, zatem
   $$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 15cm$$
   $$a = \frac{30}{\sqrt{3}}\ cm = \frac{30\sqrt{3}}{3}\ cm = 10\sqrt{3}\ cm,$$

$$P_{\mathrm{GBC}} + P_{\mathrm{ADF}} = \frac{(10\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}\ cm^2 = \frac{300\sqrt{3}}{4}\ cm^2 = 75\sqrt{3}\,cm^2$$

4. $P_{\mathrm{ABGF}} = P_{\mathrm{ABCD}} - (P_{\mathrm{GBC}} + P_{\mathrm{ADF}})$
   $P_{\mathrm{ABCD}} = 30\ cm \cdot 15\ cm = 450\ cm^2$
   $P_{\mathrm{ABGF}} = 450\ cm^2 - 75\sqrt{3}\,cm^2 = \left(450 - 75\sqrt{3}\right) cm^2$
5. $P_{\Delta EFG} = P_{\Delta ABE} - P_{\mathrm{ABGF}} = 225\sqrt{3}\,cm^2 - \left(450 - 75\sqrt{3}\right) cm^2 = \left(225\sqrt{3} - 450 + 75\sqrt{3}\right) cm^2 = \left(300\sqrt{3} - 450\right) cm^2$

Pole trójkąta EFG wynosi $(300\sqrt{3} - 450)\ cm^2$

Sposób II



1. Zauważmy, że $P_{\Delta EFG} = P_{\Delta ABE} - P_{\mathrm{ABGF}}$
2. Trójkąt ABE to trójkąt równoboczny o boku 30 cm.
   $P_{\Delta ABE} = \frac{30^2\sqrt{3}}{4} cm^2 = \frac{900\sqrt{3}}{4} cm^2 = 225\sqrt{3}\,cm^2.$
3. $P_{\mathrm{ABGF}} = P_{\mathrm{ABCD}} - P_{\mathrm{GHBC}}$

   Niech $|GB| = a$, zatem
   $$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 15cm$$
   $$a = \frac{30}{\sqrt{3}}\ cm = \frac{30\sqrt{3}}{3}\ cm = 10\sqrt{3}\ cm,$$
   $$\frac{a}{2} = 5\sqrt{3}\ cm,$$

$P_{\mathrm{GHBC}} = 15cm \cdot 5\sqrt{3}cm = 75\sqrt{3}\ cm^2$

4. $P_{\mathrm{ABGF}} = P_{\mathrm{ABCD}} - P_{\mathrm{GHBC}}$

$P_{\mathrm{ABCD}} = 30\ cm \cdot 15\ cm = 450\ cm^2$
$P_{\mathrm{GHBC}} = 15cm \cdot 5\sqrt{3}cm = 75\sqrt{3}\ cm^2$
$P_{\mathrm{ABGF}} = P_{\mathrm{ABCD}} - P_{\mathrm{GHBC}} = \left(450 - 75\sqrt{3}\right) cm^2$

5. $P_{\Delta EFG} = P_{\Delta ABE} - P_{\mathrm{ABGF}} = 225\sqrt{3}\,cm^2 - \left(450 - 75\sqrt{3}\right) cm^2 = \left(225\sqrt{3} - 450 + 75\sqrt{3}\right) cm^2 = \left(300\sqrt{3} - 450\right) cm^2$

Pole trójkąta EFG wynosi $(300\sqrt{3} - 450)\ cm^2$

Zasady punktacji (sposób I i II).
Uczestnik otrzymuje:
4 punkty – gdy poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że pole trójkąta EFG wynosi $(300\sqrt{3}-450)\ cm^2$

3 punkty –

- gdy poprawnie wyznaczy $P_{\Delta ABE}=225\sqrt{3}\,cm^2$ i poprawnie wyznaczy P_{ABGF} = $\left(450-75\sqrt{3}\right)\,cm^2$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- gdy poprawnie wyznaczy $P_{\Delta ABE}=225\sqrt{3}\,cm^2$ i wyznaczając P_{ABGF} popełni błąd rachunkowy, (np. przy rozwiązywaniu równania $\frac{a\sqrt{3}}{2}=15cm$), ale konsekwentnie do popełnionego błędu wyznaczy poprawnie wartość $P_{\Delta EFG}$ **lub**
- gdy wyznaczy z błędem rachunkowym $P_{\Delta ABE}$ i poprawnie $P_{\mathrm{ABGF}}=\left(450-75\sqrt{3}\right)\,cm^2$, ale konsekwentnie do popełnionego błędu wyznaczy poprawnie wartość $P_{\Delta EFG}$ **lub**

2 punkty – gdy

- popełni błędy rachunkowe przy wyznaczaniu $P_{\Delta ABE}$ i popełni błędy rachunkowe przy wyznaczaniu P_{ABGF}, ale konsekwentnie do popełnionych błędów wyznaczy poprawnie wartość $P_{\Delta EFG}$ **lub**
- poprawnie wyznaczy $P_{\mathrm{ABGF}}=\left(450-75\sqrt{3}\right)\,cm^2$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy $P_{\Delta ABE}=225\sqrt{3}\,cm^2$ i zapisze, że pole trapezu ABGF jest równe np. $P_{\mathrm{ABGF}}=P_{\mathrm{ABCD}}-P_{\mathrm{GHBC}}$ lub $P_{\mathrm{ABGF}}=P_{\mathrm{ABCD}}-(P_{\Delta\mathrm{GBC}}+P_{\Delta\mathrm{ADF}})$ lub $P_{\mathrm{ABGF}}=P_{\mathrm{ABCD}}-2P_{\Delta\mathrm{GBC}}$
- poprawnie wyznaczy sumę pól trójkątów GBC i ADF:
  $P_{\Delta\mathrm{GBC}}+P_{\Delta\mathrm{ADF}}=\frac{(10\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}\ cm^2=75\sqrt{3}\,cm^2$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy $P_{\mathrm{GHBC}}=15cm\cdot 5\sqrt{3}cm=75\sqrt{3}\,cm^2$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy $P_{\Delta\mathrm{GBC}}=\frac{75\sqrt{3}}{2}\ cm^2$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

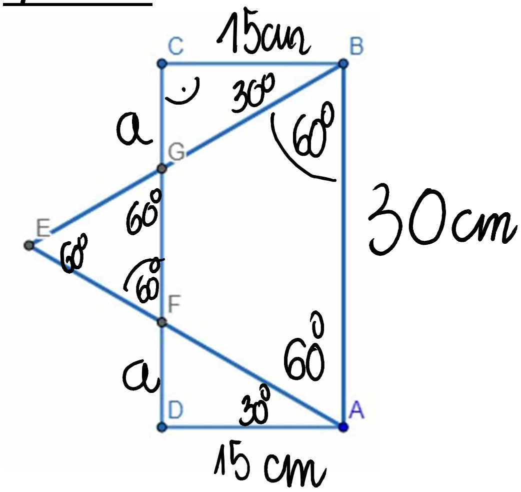
1 punkt - gdy

- poprawnie wyznaczy długość odcinka $|GC|=5\sqrt{3}\,cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy długość odcinka $|GC|=\frac{15}{\sqrt{3}}cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy długość odcinka $|BG|=10\sqrt{3}\,cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy długość odcinka $|BG|=\frac{30}{\sqrt{3}}cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, że pole $P_{\Delta EFG}=P_{\Delta ABE}-P_{\mathrm{ABGF}}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, że pole trapezu ABGF jest równe np. $P_{\mathrm{ABGF}}=P_{\mathrm{ABCD}}-P_{\mathrm{GHBC}}$ lub $P_{\mathrm{ABGF}}=P_{\mathrm{ABCD}}-(P_{\Delta\mathrm{GBC}}+P_{\Delta\mathrm{ADF}})$ lub $P_{\mathrm{ABGF}}=P_{\mathrm{ABCD}}-2P_{\Delta\mathrm{GBC}}$ i na tym zakończy lub dalej popełni **lub**
- gdy poprawnie wyznaczy $P_{\Delta ABE}=225\sqrt{3}\,cm^2$ i na tym zakończy lub dalej popełni **lub**

- gdy poprawnie ułoży równanie np. $|GC|\sqrt{3} = 15\ cm$ lub $\frac{|GB|}{2}\sqrt{3} = 15\ cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni.

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Sposób III



1. Oznaczmy odcinek $|CG| = a$
2. Zauważmy, że trójkąt BCG to trójkąt prostokątny o kątach ostrych 30°i 60°.
3. Z własności trójkąta 30°, 60°, 90° otrzymujemy równanie $a\sqrt{3} = 15\ cm$, zatem $a = \frac{15}{\sqrt{3}}cm = \frac{15\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}cm = \frac{15\sqrt{3}}{3}cm = 5\sqrt{3}\ cm.$
4. Trójkąt EFG jest trójkątem równobocznym o boku równym $(30 - 10\sqrt{3})cm$

4a.

$P_{\Delta EFG}$=$\frac{(30-10\sqrt{3})^2\cdot\sqrt{3}}{4}\ cm^2$=$\frac{(30-10\sqrt{3})\cdot(30-10\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}}{4}cm^2$=$\frac{(900-300\cdot\sqrt{3}-300\cdot\sqrt{3}+300)\sqrt{3}}{4}cm^2$= $\frac{(1200-600\cdot\sqrt{3})\sqrt{3}}{4}cm^2 = \frac{1200\sqrt{3}-600\cdot\sqrt{9}}{4}cm^2 = \frac{1200\sqrt{3}-600\cdot3}{4}cm^2 = \frac{1200\sqrt{3}-1800}{4}cm^2$

$P_{\Delta EFG}$= $(300\sqrt{3} - 450)\ cm^2$

4b.

$P_{\Delta EFG}$=$\frac{(30-10\sqrt{3})^2\cdot\sqrt{3}}{4}\ cm^2 = \frac{(900-600\cdot\sqrt{3}+300)\sqrt{3}}{4}cm^2 = \frac{(1200-600\cdot\sqrt{3})\sqrt{3}}{4}cm^2 = (300\sqrt{3} - 450)\ cm^2$

4c.

Trójkąt EFG jest trójkątem równobocznym o boku równym $(30 - 10\sqrt{3})cm$ i wysokości równej $\frac{(30-10\sqrt{3})\ \sqrt{3}}{2}\ cm = (15\sqrt{3} - 15)cm$ Zatem pole trójkąta wynosi

$P_{\Delta EFG}$=$\frac{1}{2}\cdot(30 - 10\sqrt{3})cm\cdot(15\sqrt{3} - 15)cm = (15 - 5\sqrt{3})cm\cdot(15\sqrt{3} - 15)cm =$

$= (225\sqrt{3} - 225 - 225 + 75\sqrt{3})\ cm^2$=$(300\sqrt{3} - 450)\ cm^2$

Pole trójkąta EFG wynosi $(300\sqrt{3} - 450)\ cm^2$

Zasady punktacji (sposób III).

Uczestnik otrzymuje:

4 punkty – gdy poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że pole trójkąta EFG wynosi

$$(300\sqrt{3} - 450)\ cm^2$$

3 punkty – gdy

- poprawnie wyznaczy długość boku trójkąta EFG równą $(30 - 10\sqrt{3})cm$ i zapisze, że pole trójkąta $P_{\Delta EFG}$=$\frac{(30-10\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ cm^2 i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy długość boku trójkąta EFG równą $(30 - 10\sqrt{3})cm$, poprawnie wyznaczy wysokość trójkąta równą $\frac{(30-10\sqrt{3})\sqrt{3}}{2}$ cm oraz zapisze, że pole trójkąta jest równe $np. P_{\Delta EFG}$=$\frac{1}{2} \cdot (30 - 10\sqrt{3})cm \cdot \frac{(30-10\sqrt{3})\sqrt{3}}{2}$ cm lub $P_{\Delta EFG}$=$\frac{1}{2} \cdot (30 - 10\sqrt{3})cm \cdot (15\sqrt{3} - 15)cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy długość boku trójkąta EFG równą $(30 - 10\sqrt{3})$ cm i zastosuje poprawny wzór na wysokość trójkąta równobocznego, ale przy wyznaczaniu wysokości popełni błąd rachunkowy, ale konsekwentnie do popełnionego błędu wyznaczy poprawnie wartość pola l**ub**
- zapisze poprawne równanie $np.$: $|GC|\sqrt{3} = 15\ cm$ lub $a\sqrt{3} = 15\ cm$, ale popełni błąd w rozwiązywaniu równania i konsekwentnie do wyznaczonego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie.

2 punkty – gdy

- poprawnie wyznaczy długość boku trójkąta EFG równą $(30 - 10\sqrt{3})$ cm i na tym zakończy lub zastosuje niewłaściwy wzór na pole trójkąta równobocznego **lub**
- poprawnie wyznaczy długość boku trójkąta EFG równą $(30 - 10\sqrt{3})$ cm i na tym zakończy lub zastosuje niewłaściwy wzór na wysokość trójkąta równobocznego.

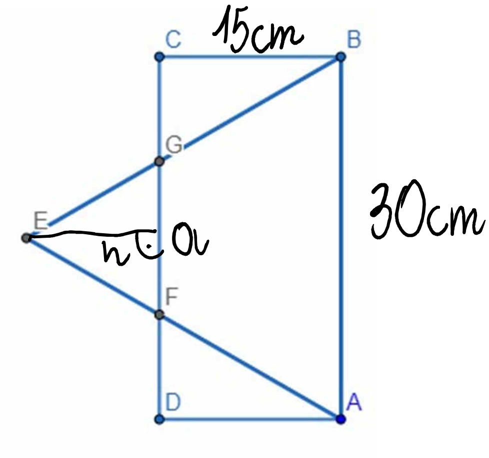
1 punkt - gdy

- poprawnie wyznaczy długość odcinka $|GC| = 5\sqrt{3}\ cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy długość odcinka $|GC| = \frac{15}{\sqrt{3}} cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy długość odcinka $|BG| = 10\sqrt{3}\ cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy długość odcinka $|GC| = \frac{30}{\sqrt{3}} cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- gdy poprawnie ułoży równanie np. $|GC|\sqrt{3} = 15\ cm$ lub $\frac{|GB|}{2}\sqrt{3} = 15\ cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni.

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Uwaga!
W rozwiązaniu zadania uczestnik może zaznaczyć dane i szukane np. na rysunku pomocniczym.

Sposób IV



1. Zauważmy, że trójkąt FGE jest trójkątem równobocznym, oznaczmy odcinek $|FG| = a$.
2. Trójkąt ABE jest trójkątem równobocznym o boku równym $30\,cm$ i wysokości równej $\frac{30\sqrt{3}}{2}cm = 15\sqrt{3}\,cm$
3. Trójkąt FGE to równoboczny o wysokości h = $\left(15\sqrt{3} - 15\right)\,cm$
4. Ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, możemy obliczyć długość boku a

$$\left(15\sqrt{3} - 15\right)\,cm = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$
$$\left(30\sqrt{3} - 30\right)\,cm = a\sqrt{3}$$
$$\frac{\left(30\sqrt{3} - 30\right)}{\sqrt{3}}cm = a$$
$$\left(30 - \frac{30}{\sqrt{3}}\right)cm = a$$
$$\left(30 - 10\sqrt{3}\right)cm = a$$

5. Trójkąt EFG jest trójkątem równobocznym o boku $a = \left(30 - 10\sqrt{3}\right)cm$

5a.

$P_{\Delta EFG}$=$\frac{\left(30-10\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}\,cm^2$=$\frac{\left(30-10\sqrt{3}\right)\cdot\left(30-10\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3}}{4}\,cm^2$=$\frac{\left(900-300\cdot\sqrt{3}-300\cdot\sqrt{3}+300\right)\sqrt{3}}{4}\,cm^2$= $\frac{\left(1200-600\cdot\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{4}cm^2 = \frac{1200\sqrt{3}-600\cdot\sqrt{9}}{4}cm^2 = \frac{1200\sqrt{3}-600\cdot 3}{4}cm^2 = \frac{1200\sqrt{3}-1800}{4}cm^2 =$

$P_{\Delta EFG}$= $(300\sqrt{3} - 450)\,cm^2$

5b.

$P_{\Delta EFG}$=$\frac{\left(30-10\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}\,cm^2 = \frac{\left(900-600\cdot\sqrt{3}+300\right)\sqrt{3}}{4}cm^2 = \frac{\left(1200-600\cdot\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{4}cm^2 = (300\sqrt{3} - 450)\,cm^2$

5c.

Trójkąt EFG jest trójkątem równobocznym o boku równym $\left(30 - 10\sqrt{3}\right)cm$ i wysokości równej $\frac{\left(30-10\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{2}\,cm = \left(15\sqrt{3} - 15\right)cm$ Zatem pole trójkąta wynosi

$P_{\Delta EFG}$=$\frac{1}{2}\cdot\left(30 - 10\sqrt{3}\right)cm\cdot\left(15\sqrt{3} - 15\right)cm = \left(15 - 5\sqrt{3}\right)cm\cdot\left(15\sqrt{3} - 15\right)cm =$
$= (225\sqrt{3} - 225 - 225 + 75\sqrt{3})\ \ cm^2$=$(300\sqrt{3} - 450)\,cm^2$

Pole trójkąta EFG wynosi $(300\sqrt{3} - 450)\,cm^2$

Zasady punktacji (sposób IV). Uczestnik otrzymuje:

4 punkty – gdy poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że pole trójkąta EFG wynosi $(300\sqrt{3}-450)\ cm^2$

3 punkty – gdy

- poprawnie wyznaczy długość boku trójkąta EFG równą $\left(30-10\sqrt{3}\right)cm$ i zapisze, że pole trójkąta $P_{\Delta EFG}$=$\frac{\left(30-10\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}\ cm^2$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy wysokość trójkąta EFG równą $\left(15\sqrt{3}-15\right)\ cm\ i$ poprawnie wyznaczy długość boku trójkąta EFG $np.: a=\left(30-10\sqrt{3}\right)cm$ lub $\frac{\left(30\sqrt{3}-30\right)}{\sqrt{3}}\ cm=a$ i zapisze, że pole trójkąta EFG jest równe np.: $P_{\Delta EFG}$=$\frac{1}{2}\cdot\left(30-10\sqrt{3}\right)cm\cdot\left(15\sqrt{3}-15\right)cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy wysokość trójkąta EFG równą $\left(15\sqrt{3}-15\right)cm\ i$ zapisze poprawne równanie $np.\left(15\sqrt{3}-15\right)\ cm=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, ale popełni błąd w rozwiązywaniu tego równania i konsekwentnie do wyznaczonego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie.

2 punkty – gdy

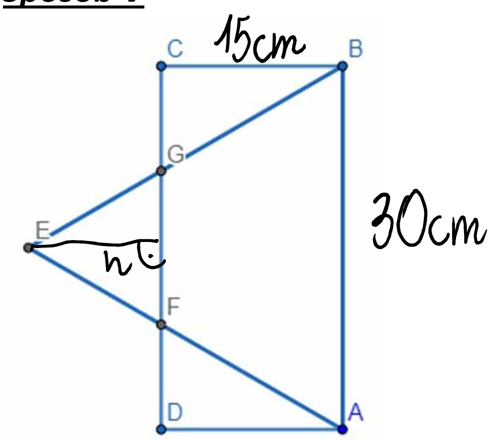
- poprawnie wyznaczy długość boku trójkąta EFG równą $\left(30-10\sqrt{3}\right)\ cm$ i na tym zakończy lub zastosuje niewłaściwy wzór na pole trójkąta równobocznego **lub**
- poprawnie wyznaczy długość boku trójkąta EFG równą $\left(30-10\sqrt{3}\right)\ cm$ i na tym zakończy lub zastosuje niewłaściwy wzór na pole trójkąta.

1 punkt - gdy

- poprawnie wyznaczy wysokość trójkąta EFG równą $\left(15\sqrt{3}-15\right)cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- gdy poprawnie ułoży równanie $\left(15\sqrt{3}-15\right)\ cm=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Sposób V



1. Trójkąt ABE jest trójkątem równobocznym o boku równym 30 cm i wysokości równej $\frac{30\sqrt{3}}{2}\ cm=15\sqrt{3}\ cm$ i $P_{\Delta ABE}=\frac{30^2\sqrt{3}}{4}\ cm^2=\frac{900\sqrt{3}}{4}\ cm^2=225\sqrt{3}\ cm^2$.

2. Trójkąt FGE to równoboczny o wysokości h = $\left(15\sqrt{3}-15\right)\,cm$
3. Zauważmy, że trójkąt FGE jest trójkątem podobnym do trójkąta ABE w skali k, gdzie $k=\frac{(15\sqrt{3}-15)}{15\sqrt{3}}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$
4. Pole trójkąta EFG możemy obliczyć, ze wzoru:
$P_{\Delta EFG}=P_{\Delta ABE}\cdot k^2$
$P_{\Delta EFG}$=$225\sqrt{3}\,cm^2\cdot\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=225\sqrt{3}\,cm^2\cdot\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}\right)=225\sqrt{3}\,cm^2\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=$ $(300\sqrt{3}-450)\,cm^2$

Pole trójkąta EFG wynosi $(300\sqrt{3}-450)\,cm^2$

Zasady punktacji: (sposób V) Uczestnik otrzymuje:

4 punkty – gdy poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że pole trójkąta EFG wynosi $(300\sqrt{3}-450)\,cm^2$

3 punkty – gdy
- zapisze, że wartość pola $P_{\Delta EFG}$=$225\sqrt{3}\,cm^2\cdot\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy $P_{\Delta ABE}=225\sqrt{3}\,cm^2$ i wyznaczając skalę podobieństwa ze wzoru $k=\frac{(15\sqrt{3}-15)}{15\sqrt{3}}$ popełni błąd rachunkowy, ale konsekwentnie do popełnionego błędu wyznaczy bezbłędnie wartość $P_{\Delta EFG}$ **lub**
- poprawnie wyznaczy skalę podobieństwa ze równą $k=\frac{(15\sqrt{3}-15)}{15\sqrt{3}}=lub\ k=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ i wyznaczając pole trójkąta ABE popełni błąd rachunkowy, ale konsekwentnie do popełnionego błędu wyznaczy bezbłędnie wartość $P_{\Delta EFG}$.

2 punkty – gdy
- poprawnie wyznaczy $P_{\Delta ABE}=225\sqrt{3}\,cm^2$ i poprawnie wyznaczy skalę podobieństwa ze równą $k=\frac{(15\sqrt{3}-15)}{15\sqrt{3}}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy (np. zastosuje niewłaściwy wzór na pole trójkąta EFG) **lub**
- zapisze, że pole trójkąta $P_{\Delta EFG}=P_{\Delta ABE}\cdot k^2$ i poprawnie wyznaczy wartość skalę podobieństwa ze równą $k=\frac{(15\sqrt{3}-15)}{15\sqrt{3}}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy inne niż omówione wyżej **lub**
- poprawnie wyznaczy $P_{\Delta ABE}=225\sqrt{3}\,cm^2$ i zapisze, że pole $P_{\Delta EFG}=P_{\Delta ABE}\cdot k^2$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy inne niż omówione wyżej.

1 punkt - gdy
- poprawnie wyznaczy $P_{\Delta ABE}=225\sqrt{3}\,cm^2$ i na tym zakończy lub dalej popełni **lub**
- poprawnie wyznaczy wysokość trójkąta EFG równą $\left(15\sqrt{3}-15\right)cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- wyznaczy skalę podobieństwa trójkątów EFG i ABE np.: $k=\frac{(15\sqrt{3}-15)}{15\sqrt{3}}$ lub $k=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Uwaga !
W rozwiązaniu zadania uczestnik może zaznaczyć dane i szukane, np. na rysunku pomocniczym.

Login uczestnika **Pieczęć szkoły** **Data urodzenia uczestnika**

Dzień Miesiąc Rok

…………………………………………………

Karta odpowiedzi zadań nr 21, 22, 23 i 24 testu internetowego

Zadanie 21 (3 p.) Liczba uzyskanych punktów: ____/ **3**

Zadanie 22 (4 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ____/ **4**

Podpis sprawdzającego (imieniem i nazwiskiem): ……………………………………………………………………………………

Zadanie 23 (5 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ____/ **5**

Podpis sprawdzającego (imieniem i nazwiskiem): ……………………………………………………………………………………

Zadanie 24 (4 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ____/ **4**

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Podpis sprawdzającego (imieniem i nazwiskiem): ……………………………………………………………………………………

Login ucznia

Data urodzenia uczestnika

Dzień Miesiąc Rok

Wojewódzki Konkurs Matematyczny

dla uczniów szkół podstawowych województwa wielkopolskiego – stopień wojewódzki

2020/2021

Myślę, działam, odkrywam, tworzę

Instrukcja dla uczestnika

1. Sprawdź, czy test zawiera **19 stron**. Ewentualny brak stron lub inne usterki zgłoś Komisji przed rozpoczęciem konkursu.
2. Czytaj uważnie wszystkie teksty i zadania. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra piszącego czarnym lub niebieskim kolorem. Nie używaj korektora.
3. Test, do którego przystępujesz, zawiera **24 zadania**. Wśród nich są zadania zamknięte, zadania typu prawda fałsz oraz zadania otwarte wymagające krótszej lub dłuższej odpowiedzi. Zadania zamknięte to zadania od 1 do 18. Zadania prawda - fałsz to zadania 19 i 20.
4. W każdym **zadaniu zamkniętym** wybierz tylko **jedną odpowiedź** i zamaluj długopisem/piórem odpowiednią kratkę na karcie odpowiedzi, np. gdy wybrałeś odpowiedź „**A**”:

A	B	C	D

   Jeśli się pomylisz, błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz inną odpowiedź, np.:

A	B	C	D

   Za każdą poprawnie udzieloną odpowiedź otrzymasz jeden punkt, a za odpowiedzi błędne lub brak odpowiedzi – zero punktów.
5. W zadaniach **prawda – fałsz** oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe, np. gdy wybrałeś odpowiedź „**P**”:

P	F

   Jeśli się pomylisz, błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz inną odpowiedź, np.:

P	F
6. W zadaniach **otwartych** zapisz rozwiązania starannie i czytelnie w miejscach wyznaczonych przy poszczególnych zadaniach. Pamiętaj, że pominięcie uzasadnienia lub części obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów. Pomyłki przekreślaj (nie stosuj korektora).
7. Rozwiązując zadania, możesz korzystać z przyborów geometrycznych (linijki i cyrkla) oraz ze strony oznaczonej jako **brudnopis**. Zapisy w brudnopisie nie będą sprawdzane i oceniane.
8. Podczas trwania konkursu nie możesz korzystać z żadnych pomocy naukowych (w tym również kalkulatora i urządzeń elektronicznych) oraz podpowiedzi kolegów – narażasz ich i siebie na dyskwalifikację. Nie wolno Ci również zwracać się z jakimikolwiek wątpliwościami do członków Komisji.
9. Za rozwiązanie całego testu możesz otrzymać maksymalnie **40 punktów**.
10. Na udzielenie odpowiedzi masz **90 minut.**

Życzymy Ci powodzenia!

Wypełnia Komisja Konkursowa (po rozkodowaniu pracy)

……………………………………………………………………

Imię i nazwisko uczestnika **Liczba uzyskanych punktów** ……… / **40**

Zadanie 1. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Z cyfr 2, 3 i 5 Asia utworzyła wszystkie możliwe liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach. Wskaż zdanie prawdziwe:

A. wszystkie utworzone przez Asię liczby są nieparzyste

B. wśród liczb utworzonych przez Asię są liczby podzielne przez 3

C. dwie utworzone przez Asię liczby są podzielne przez 5

D. wszystkie utworzone przez Asię liczby są mniejsze od 530

Zadanie 2. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Rozwiązaniem równania $(x^2-2)^3=-8$ jest liczba:

A. 2 B. 0 C. -2 D. 1

Zadanie 3. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Na planie miasta, narysowanym w skali 1:50000, las jest prostokątem o bokach 4 cm i 5 cm. Wynika stąd, że ten las ma powierzchnię:

A. $0{,}5\ km^2$ B. $5\ km^2$ C. $5000\ m^2$ D. $10000\ m^2$

Zadanie 4. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Jeżeli długość każdej krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego zwiększymy 2 razy, a jego wysokość zmniejszymy 2 razy, to objętość ostrosłupa:

A. zwiększy się czterokrotnie
B. zwiększy się dwukrotnie
C. zmniejszy się dwukrotnie
D. nie zmieni się

Zadanie 5. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Z odcinków o długościach 3, 2a-3, a+3 można zbudować trójkąt równoramienny. Wynika stąd, że

A. $a=3$ B. $a=0$ C. $a=2$ D. $a=6$

Zadanie 6. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

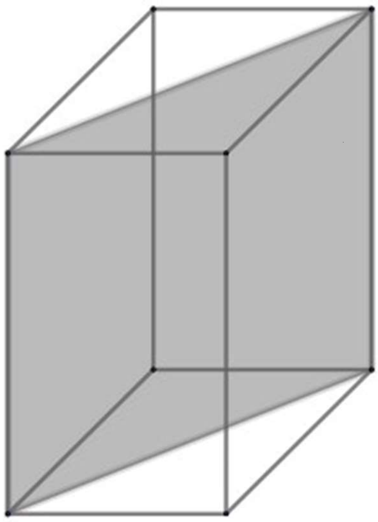
Dla $x=\frac{3}{\sqrt{3}}+1$ oraz $y=\sqrt{3}-1$ wartość wyrażenia $x^2-2xy+y^2$ jest równa:

A. 4 B. 1 C. $\frac{9}{\sqrt{3}}$ D. $2\sqrt{3}$

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Zadanie 7. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

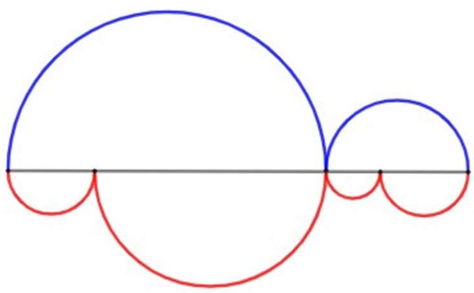
Przekrój graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest prostokątem, zaznaczonym na rysunku. Wymiary tego prostokąta wynoszą odpowiednio $4\ cm\ \ i\ 0,5\ dm$. Wiedząc, że wysokość tego graniastosłupa jest równa $0,5\ dm$ to objętość tego graniastosłupa wynosi:



A. $50\ cm^3$ B. $100\ cm^3$ C. $80\ cm^3$ D. $40\ cm^3$

Zadanie 8. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Linie czerwona i niebieska są złożone z półokręgów. Wskaż zdanie prawdziwe:

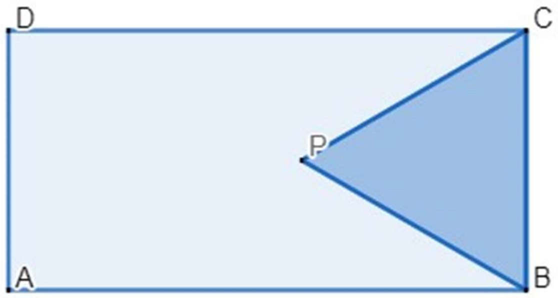


A. linia nad odcinkiem jest dłuższa
B. linia pod odcinkiem jest dłuższa
C. obie linie są równej długości
D. nie można określić, która linia jest dłuższa ponieważ jest za mało informacji

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Zadanie 9. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Z prostokąta ABCD obwodzie 60 wycięto trójkąt równoboczny BPC o obwodzie 30 (tak, jak pokazano na rysunku). Obwód pięciokąta ABPCD jest równy:



A. 50 B. 60 C. 70 D. 80

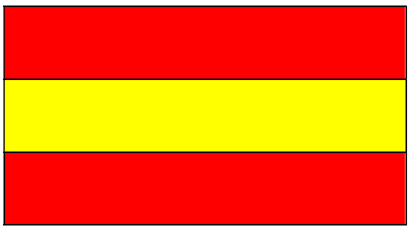
Zadanie 10. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

W kolejnych 8 rzutach sześcienną kostką otrzymano następujące wyniki: 1,3,1,6,2,2,5,4. Mediana tych wyników jest równa:

A. 3 B. 1,5 C. 4 D. 2,5

Zadanie 11. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Flagę pokazaną na rysunku, należy zszyć z trzech jednakowej szerokości pasów kolorowej tkaniny. Oba zewnętrzne pasy mają być tego samego koloru, a pas znajdujący się między nimi ma być innego koloru. Liczba różnych flag, które można uszyć, mając do dyspozycji tkaniny w 20 kolorach, jest równa:



A. 40 B. 399 C. 400 D. 380

Zadanie 12. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Doświadczenie polega na rzucie dwiema monetami i sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wynikiem rzutu są dwie reszki i 4 oczka na kostce, jest równe:

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{24}$ C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{1}{48}$

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Zadanie 13. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

W układzie współrzędnych dane są punkty A=(a,8) oraz B=(9,b). Środkiem odcinka AB jest punkt S=(5,3). Wynika stąd , że

A. $a = 1 \ i \ b = -2$
B. $a = -4 \ i \ b = -5$
C. $a = 14 \ i \ b = 4$
D. $a = 7 \ i \ b = -2$

Zadanie 14. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Pole koła o obwodzie 16π wynosi:

A. $8\,\pi$ B. 16π C. 64π D. 32π

Zadanie 15. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Wyrażenie $2\frac{2}{3} - 1\frac{1}{3}x$ przyjmuje wartości nieujemne tylko wtedy, gdy:

A. $x \leq 2$ B. $x \geq 2$ C. $x \leq -2$ D. $x \geq -2$

Zadanie 16. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Czwarta część sumy $8^{10} + 8^{10}$ jest równa:

A. 2^{10} B. 2^{18} C. 2^{21} D. 2^{29}

Zadanie 17. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Liczby a i b są dodatnie. 15% liczby a jest równe 12% liczby b. Wynika stąd, że b jest równe:

A. $150\% \ liczby \ a$
B. $103\% \ liczby \ a$
C. $125\% \ liczby \ a$
D. $120\% \ liczby \ a$

Zadanie 18. (1 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Jeśli $x = \frac{a}{y-a}$ to:

A. $a = \frac{x+1}{xy}$ B. $a = \frac{x-1}{xy}$ C. $a = \frac{xy}{x-1}$ D. $a = \frac{xy}{x+1}$

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Zadania otwarte

Zadanie 19. (3 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Czwórka przyjaciół ważyła się parami – każdy z każdym. Ania, jedna z grupy zapisywała wszystkie wyniki i na koniec odczytała następujące liczby:156 kg, 120 kg, 135 kg, 143 kg, 147kg, 139 kg.

Określ prawdziwość zdań, zaznaczając P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub zaznaczając F, jeśli zdanie jest fałszywe.

Wszyscy przyjaciele ważą razem parzystą liczbę kilogramów.	P	F
Wszyscy przyjaciele ważą razem więcej niż 300 kg	P	F
Wszyscy przyjaciele ważą razem więcej niż 270 kg	P	F

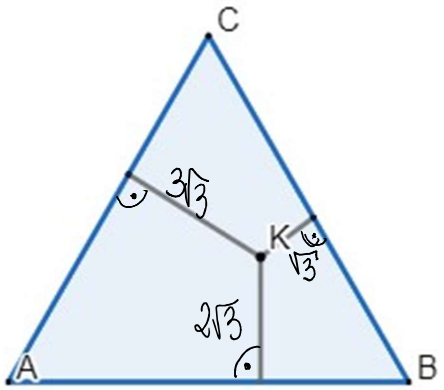
Zadanie 20. (3 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Wynikiem działania $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1+\frac{1}{2010}\right)\left(1+\frac{1}{2011}\right)$ jest pewna liczba x. Określ prawdziwość zdań, zaznaczając P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub zaznaczając F, jeśli zdanie jest fałszywe.

Liczba x jest mniejsza niż 1000.	P	F
Liczba x nie jest całkowita.	P	F
Liczba x jest nieparzysta.	P	F

Zadanie 21. (4 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **4**

Trójkąt ABC jest równoboczny. Wewnątrz trójkąta obrano punkt K, którego odległości od boków trójkąta AB, BC i CA wynoszą odpowiednio $2\sqrt{3}, \sqrt{3}$ i $3\sqrt{3}$ (patrz rysunek). Oblicz pole i obwód tego trójkąta.



Zadanie 22. (4 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **4**

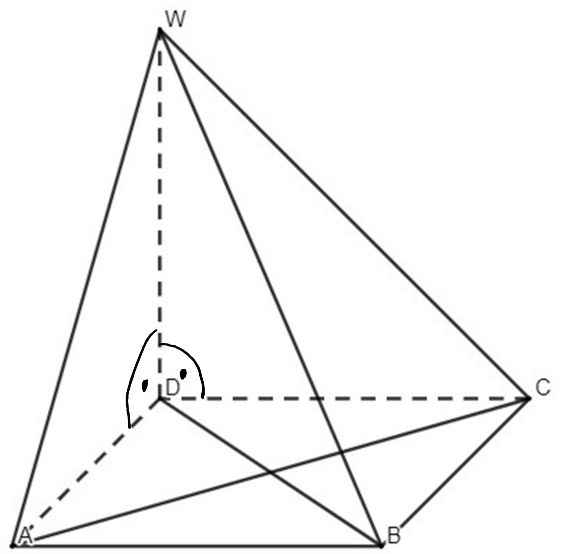
Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach A (-2,1) B (4,5), C (10,-4) jest prostokątny.

Zadanie 23. (3 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Ogon wielkiej ryby waży 3kg. Głowa tej ryby waży tyle, ile ogon i trzecia część tułowia, a tułów tyle, ile głowa i ogon. Ile waży ryba ?

Zadanie 24. (5 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **5**

Podstawą ostrosłupa ABCDW jest prostokąt ABCD, krawędź boczna DW jest wysokością tego ostrosłupa. Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeśli najdłuższa krawędź boczna ma długość równą 12 cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°, a przekątne podstawy przecinają się pod kątem 60°.



Brudnopis (nie podlega ocenie)

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Karta odpowiedzi zadań zamkniętych

Login uczestnika

Data urodzenia uczestnika

Dzień Miesiąc Rok

Numer zadania	Odpowiedzi				Liczba punktów
1.	A	B	C	D	
2.	A	B	C	D	
3.	A	B	C	D	
4.	A	B	C	D	
5.	A	B	C	D	
6.	A	B	C	D	
7.	A	B	C	D	
8.	A	B	C	D	
9.	A	B	C	D	
10.	A	B	C	D	
11.	A	B	C	D	
12.	A	B	C	D	
13.	A	B	C	D	
14.	A	B	C	D	
15.	A	B	C	D	
16.	A	B	C	D	
17.	A	B	C	D	
18.	A	B	C	D	

Wypełnia komisja konkursowa

Suma punktów za zadania zamknięte

Suma punktów za zadania otwarte

Suma punktów za cały arkusz

Wypełnia Komisja Konkursowa

Suma uzyskanych punktów: ....

....

Podpis oceniającego (imieniem i nazwiskiem)

Wojewódzki Konkurs Matematyczny

dla uczniów szkół podstawowych województwa wielkopolskiego

„Myślę, działam, odkrywam, tworzę”

STOPIEŃ WOJEWÓDZKI rok szkolny 2020/2021

Klucz punktowania zadań zamkniętych i zasady oceniania zadań otwartych

1. **Klucz punktowania zadań zamkniętych.**
   Za każdą poprawną odpowiedź uczeń otrzymuje 1 punkt.

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Poprawna odpowiedź	C	B	B	B	D	A	D	C	C	D	D	B	A	C	A	D	C	D

„Myślę, działam, odkrywam, tworzę" – zasady oceniania

2. Przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych.

Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania nieuwzględnione w zasadach punktowania przyznajemy maksymalną liczbę punktów należnych za to zadanie.

UWAGA : Nie jest wymagana od ucznia na końcu zadania wyraźnie sformułowana odpowiedź słowna wystarczy, że uczeń wyznaczy, obliczy szukaną wartość, bądź przeprowadzi argumentację w zadaniu na dowodzenie.

Zadanie 19. (3 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Czwórka przyjaciół ważyła się parami – każdy z każdym. Ania, jedna z grupy zapisywała wszystkie wyniki i na koniec odczytała następujące liczby:156 kg, 120 kg, 135 kg, 143 kg, 147 kg, 139 kg.

Określ prawdziwość zdań, zaznaczając P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub zaznaczając F, jeśli zdanie jest fałszywe.

Wszyscy przyjaciele ważą razem parzystą liczbę kilogramów.	P	F
Wszyscy przyjaciele ważą razem więcej niż 300 kg	P	F
Wszyscy przyjaciele ważą razem więcej niż 270 kg	P	F

Przykładowe rozwiązanie

Oznaczmy przez $W1, W2, W3, W4$ wagę kolejnych czterech osób z tej grupy.

Zatem możemy zapisać równania:

$$W1 + W2 = 156\ kg$$
$$W1 + W3 = 120\ kg$$
$$W1 + W4 = 135\ kg$$
$$W2 + W3 = 143\ kg$$
$$W2 + W4 = 147\ kg$$
$$W3 + W4 = 139\ kg$$

Dodając stronami równania otrzymamy:

$$3W1 + 3W2 + 3W3 + 3W4 = 156\ kg + 120\ kg + 135\ kg + 143\ kg + 147\ kg + 139\ kg$$
$$3W1 + 3W2 + 3W3 + 3W4 = 840\ kg\ /:3$$
$$W1 + W2 + W3 + W4 = 280\ kg$$

Zatem wszyscy przyjaciele ważą razem 280 kg.

1. Wszyscy przyjaciele ważą razem parzystą liczbę kilogramów. – Zdanie prawdziwe
2. Wszyscy przyjaciele ważą razem więcej niż 300 kg. - Zdanie fałszywe
3. Wszyscy przyjaciele ważą razem więcej niż 270 kg. – Zdanie prawdziwe

STOPIEŃ WOJEWÓDZKI 2020/2021
Wojewódzkiego Konkursu Matematycznego
dla uczniów szkół podstawowych województwa wielkopolskiego

„Myślę, działam, odkrywam, tworzę" – zasady oceniania

Za każdą poprawną odpowiedź uczeń otrzymuje jeden punkt. Uczeń w tym zadaniu nie musi przedstawiać rozwiązania. Punktujemy jedynie zaznaczone odpowiedzi w tabeli.

Zasady oceniania: Uczestnik otrzymuje

3 punkty – gdy wszystkie odpowiedzi są poprawne,

2 punkty – gdy dwie odpowiedzi są poprawne,

1 punkt – gdy jedna odpowiedź jest poprawna,

0 punktów – gdy wszystkie odpowiedzi są błędne.

Zadanie 20. (3 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Wynikiem działania $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2010}\right)\left(1+\frac{1}{2011}\right)$ jest pewna liczba x. Określ prawdziwość zdań, zaznaczając P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub zaznaczając F, jeśli zdanie jest fałszywe.

Liczba x jest mniejsza niż 1000.	P	F
Liczba x nie jest całkowita.	P	F
Liczba x jest nieparzysta.	P	F

Przykładowe rozwiązanie

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2010}\right)\left(1+\frac{1}{2011}\right)=\frac{\cancelto{1}{3}}{2}\cdot\frac{\cancelto{1}{4}}{\cancelto{1}{3}}\cdot\frac{\cancelto{1}{5}}{\cancelto{1}{4}}\cdot\frac{6}{\cancelto{1}{5}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancelto{1}{2011}}{2010}\cdot\frac{2012}{\cancelto{1}{2011}}=\frac{2012}{2}=1006$$

1. Liczba x jest mniejsza niż 1000. - Zdanie fałszywe
2. Liczba x nie jest całkowita. - Zdanie fałszywe
3. Liczba x jest nieparzysta. - Zdanie fałszywe

Za każdą poprawną odpowiedź uczeń otrzymuje jeden punkt. Uczeń w tym zadaniu nie musi przedstawiać rozwiązania. Punktujemy jedynie zaznaczone odpowiedzi w tabeli.

Zasady oceniania: Uczestnik otrzymuje

3 punkty – gdy wszystkie odpowiedzi są poprawne,

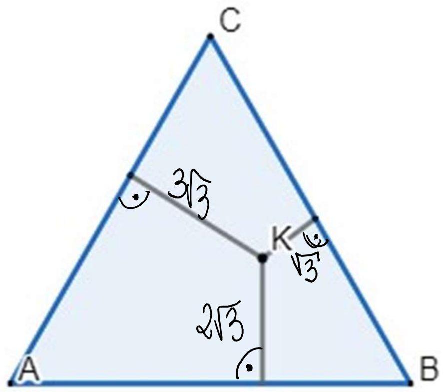
2 punkty – gdy dwie odpowiedzi są poprawne,

1 punkt – gdy jedna odpowiedź jest poprawna,

0 punktów – gdy wszystkie odpowiedzi są błędne.

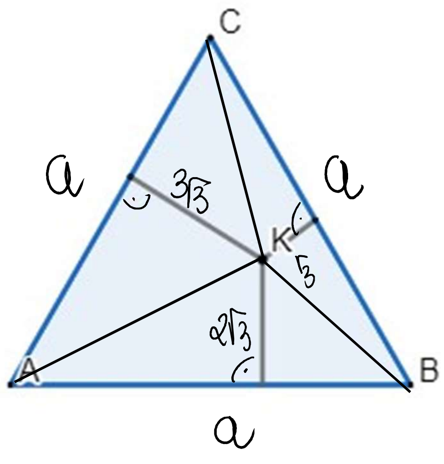
Zadanie 21. (4 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **4**

Trójkąt ABC jest równoboczny. Wewnątrz trójkąta obrano punkt K, którego odległości od boków trójkąta AB, BC i CA wynoszą odpowiednio $2\sqrt{3}, \sqrt{3}\ i\ 3\sqrt{3}$ (patrz rysunek). Oblicz pole i obwód tego trójkąta.



Przykładowe rozwiązanie

Sposób I



Oznaczmy bok trójkąta równobocznego $|AB| = |AC| = |BC| = a, gdzie\ a > 0$

1. Zauważmy, że $P_{\Delta \mathrm{ABC}} = P_{\Delta \mathrm{AKB}} + P_{\Delta \mathrm{BKC}} + P_{\Delta \mathrm{AKC}}$
2. Ze wzoru na pole trójkąta równobocznego możemy zapisać, że $P_{\Delta \mathrm{ABC}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
3. Ze wzoru na pole trójkąta możemy zapisać, że $P_{\Delta \mathrm{AKB}} = \frac{a \cdot 2\sqrt{3}}{2}\ i\ P_{\Delta \mathrm{BKC}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\ i\ P_{\Delta \mathrm{AKC}} = \frac{a \cdot 3\sqrt{3}}{2}$
4. Zatem suma pól trójkątów AKB i BKC i AKC wynosi:

$$P_{\Delta \mathrm{AKB}} + P_{\Delta \mathrm{BKC}} + P_{\Delta \mathrm{AKC}} = \frac{a \cdot 2\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a \cdot 3\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}+a\sqrt{3}+3a\sqrt{3}}{2} = \frac{6a\sqrt{3}}{2} = 3a\sqrt{3}$$

5. Z zależności $P_{\Delta\mathrm{ABC}} = P_{\Delta\mathrm{AKB}} + P_{\Delta\mathrm{BKC}} + P_{\Delta\mathrm{AKC}}$ otrzymujemy równanie:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3a\sqrt{3} \ /\cdot 4$$

$$a^2\sqrt{3} = 12a\sqrt{3} \ /:\sqrt{3}$$

$$a^2 = 12a \ /: a \text{, ponieważ } a > 0$$

$$a = 12$$

6. $P_{\Delta\mathrm{ABC}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{12^2\sqrt{3}}{4} = \frac{144\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3} \ i \ O_{\Delta\mathrm{ABC}} = 3 \cdot 12 = 36$

Pole trójkąta ABC jest równe $36\sqrt{3}$, a obwód trójkąta ABC wynosi 36.

Sposób II

Oznaczmy bok trójkąta równobocznego $|AB| = |AC| = |BC| = a, gdzie\ a > 0$ i wysokość trójkąta równobocznego h.

1. Korzystając z twierdzenia Vivianiego, które mówi o tym, że dla każdego punktu leżącego wewnątrz trójkąta równobocznego suma jego odległości od boków jest stała i wynosi tyle, co wysokość trójkąta równobocznego, otrzymujemy równanie:

$$2\sqrt{3} + \sqrt{3} + 3\sqrt{3} = h$$
$$6\sqrt{3} = h$$

2. Wykorzystując wzór na wysokość trójkąta równobocznego $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ otrzymujemy równanie:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$
$$a = 12$$

3. $P_{\Delta\mathrm{ABC}} = \frac{12\cdot 6\sqrt{3}}{2} = \frac{72\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3} \ i \ O_{\Delta\mathrm{ABC}} = 3 \cdot 12 = 36$

Pole trójkąta ABC jest równe $36\sqrt{3}$, a obwód trójkąta ABC wynosi 36.

Sposób III

Oznaczmy bok trójkąta równobocznego $|AB| = |AC| = |BC| = a, gdzie\ a > 0$ i wysokość trójkąta równobocznego h.

1. Korzystając z twierdzenia Vivianiego, które mówi o tym, że dla każdego punktu leżącego wewnątrz trójkąta równobocznego suma jego odległości od boków jest stała i wynosi tyle, co wysokość trójkąta równobocznego, otrzymujemy równanie:

$$2\sqrt{3} + \sqrt{3} + 3\sqrt{3} = h$$

$$6\sqrt{3} = h$$

2. Wykorzystując twierdzenie Pitagorasa możemy zapisać równanie:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (6\sqrt{3})^2 = a^2$$
$$\frac{a^2}{4} + 36 \cdot 3 = a^2$$
$$108 = \frac{3}{4}a^2$$
$$144 = a^2$$
$$a = 12$$

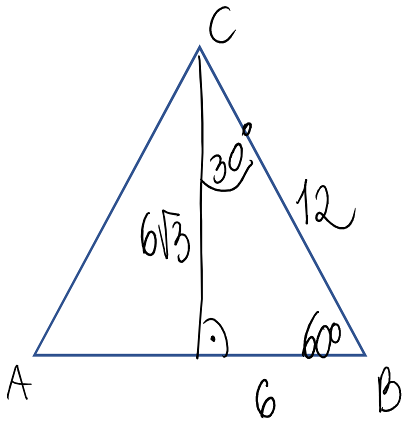
4. $P_{\Delta \mathrm{ABC}} = \frac{12 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = \frac{72\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}\ i\ O_{\Delta \mathrm{ABC}} = 3 \cdot 12 = 36$

Pole trójkąta ABC jest równe $36\sqrt{3}$, a obwód trójkąta ABC wynosi 36.

Sposób IV

Oznaczmy bok trójkąta równobocznego $|AB| = |AC| = |BC| = a, gdzie\ a > 0$ i wysokość trójkąta równobocznego h.

1. Korzystając z twierdzenia Vivianiego, które mówi o tym, że dla każdego punktu leżącego wewnątrz trójkąta równobocznego suma jego odległości od boków jest stała i wynosi tyle, co wysokość trójkąta równobocznego, otrzymujemy równanie:
$$2\sqrt{3} + \sqrt{3} + 3\sqrt{3} = h$$
$$6\sqrt{3} = h$$
2. Z własności trójkąta $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ otrzymujemy $a = 12$



3. $P_{\Delta \mathrm{ABC}} = \frac{12 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = \frac{72\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}\ i\ O_{\Delta \mathrm{ABC}} = 3 \cdot 12 = 36$

Pole trójkąta ABC jest równe $36\sqrt{3}$, a obwód trójkąta ABC wynosi 36.

Zasady oceniania: (sposób I) Uczestnik otrzymuje:

4 punkty – gdy

- poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że pole trójkąta ABC jest równe $36\sqrt{3}$, a obwód trójkąta ABC wynosi 36.

3 punkty – gdy

- poprawnie wyznaczy, że pole trójkąta ABC jest równe $36\sqrt{3}$ i na tym zakończy lub wyznaczając obwód popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy, że obwód trójkąta ABC jest równy 36 i na tym zakończy lub wyznaczając pole popełni błędy **lub**
- rozwiąże równanie $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3a\sqrt{3}$ z błędem rachunkowym, ale konsekwentnie do popełnionego błędu poprawnie wyznaczy wartość pola **i** obwodu trójkąta ABC.

2 punkty – gdy

- poprawnie wyznaczy, że bok trójkąta a=12 i na tym zakończy **lub**
- poprawnie wyznaczy, że bok trójkąta a=12 i błędnie wyznaczy pole **i** obwód trójkąta ABC.
- poprawnie ułoży równanie $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3a\sqrt{3}$ i rozwiąże równanie $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3a\sqrt{3}$ z błędem rachunkowym, ale konsekwentnie do popełnionego błędu poprawnie wyznaczy wartość pola **lub** obwodu trójkąta ABC.

1 punkt - gdy

- poprawnie ułoży $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3a\sqrt{3}$ i na tym zakończy **lub**
- poprawnie ułoży $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3a\sqrt{3}$ i rozwiąże równanie $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3a\sqrt{3}$ z błędem rachunkowym i na tym zakończy **lub**
- rozwiąże równanie $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3a\sqrt{3}$ z błędem rachunkowym i dalej błędnie wyznaczy pole **i** obwód trójkąta ABC **lub**
- zauważy i zapisze, że $P_{\Delta\mathrm{ABC}} = P_{\Delta\mathrm{AKB}} + P_{\Delta\mathrm{BKC}} + P_{\Delta\mathrm{AKC}}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- obliczy, że $P_{\Delta\mathrm{ABC}} = 3a\sqrt{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zauważy i zapisze, że $P_{\Delta\mathrm{ABC}} = \frac{a\cdot 2\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a\cdot 3\sqrt{3}}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, wzory na pola wszystkich trójkątów $P_{\Delta\mathrm{AKB}} = \frac{a\cdot 2\sqrt{3}}{2}\ i\ P_{\Delta\mathrm{BKC}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\ i\ P_{\Delta\mathrm{AKC}} = \frac{a\cdot 3\sqrt{3}}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, że $P_{\Delta\mathrm{ABC}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ i zapisze poprawnie wzory na pola trójkątów AKB i BKC np. $P_{\Delta\mathrm{AKB}} = \frac{a\cdot 2\sqrt{3}}{2}\ i\ P_{\Delta\mathrm{BKC}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, że $P_{\Delta\mathrm{ABC}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ i zapisze poprawnie wzory na pola trójkątów BKC i AKC np. $P_{\Delta\mathrm{BKC}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\ i\ P_{\Delta\mathrm{AKC}} = \frac{a\cdot 3\sqrt{3}}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**

- zapisze, że $P_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ i zapisze poprawnie wzory na pola trójkątów AKB i AKC np. $P_{\Delta AKB} = \frac{a \cdot 2\sqrt{3}}{2}$ i $P_{\Delta AKC} = \frac{a \cdot 3\sqrt{3}}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Uwaga:

W rozwiązaniu zadania zdający może pominąć zapis, że $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta AKB} + P_{\Delta BKC} + P_{\Delta AKC}$, jeśli z przedstawionego sposobu rozumowania można wywnioskować, że opiera się na tej zależności.

Zasady oceniania: (sposób II, III, IV) Uczestnik otrzymuje:

4 punkty – gdy

- poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że pole trójkąta ABC jest równe $36\sqrt{3}$, a obwód trójkąta ABC wynosi 36.

3 punkty – gdy

- poprawnie wyznaczy, że pole trójkąta ABC jest równe $36\sqrt{3}$ i na tym zakończy lub wyznaczając obwód trójkąta popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy, że obwód trójkąta ABC jest równy 36 i na tym zakończy lub wyznaczając pole trójkąta popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy wysokość trójkąta $h = 6\sqrt{3}$ i rozwiąże równanie $\frac{a\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ z błędem rachunkowym, ale konsekwentnie do popełnionego błędu poprawnie wyznaczy wartość pola **i** obwodu trójkąta ABC **lub**
- poprawnie ułoży równanie $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2 = a^2$ i wyznaczając długość boku a popełni błąd rachunkowy, ale konsekwentnie do popełnionego błędu poprawnie wyznaczy wartość pola **i** obwodu trójkąta ABC **lub**
- Wyznaczy z błędem rachunkowym h z poprawnie zapisanego równania $h = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} + 3\sqrt{3}$, ale konsekwentnie do popełnionego błędu poprawnie wyznaczy długość boku a **i** poprawnie wartość pola **i** obwodu trójkąta ABC.

2 punkty – gdy

- poprawnie wyznaczy, że bok trójkąta $a = 12$ i na tym zakończy **lub**
- poprawnie wyznaczy, że bok trójkąta $a = 12$ i błędnie wyznaczy pole **i** obwód trójkąta ABC **lub**
- rozwiąże równanie $\frac{a\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ z błędem rachunkowym, ale konsekwentnie do popełnionego błędu poprawnie wyznaczy wartość pola i na tym zakończy lub wyznaczając obwód trójkąta popełni błędy **lub**
- rozwiąże równanie $\frac{a\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ z błędem rachunkowym, ale konsekwentnie do popełnionego błędu poprawnie wyznaczy wartość obwodu i na tym zakończy lub wyznaczając pole trójkąta popełni błędy **lub**

- rozwiąże równanie $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2 = a^2$ z błędem rachunkowym, ale konsekwentnie do popełnionego błędu poprawnie wyznaczy wartość pola i na tym zakończy lub wyznaczając obwód trójkąta popełni błędy **lub**
- rozwiąże równanie $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2 = a^2$ z błędem rachunkowym, ale konsekwentnie do popełnionego błędu poprawnie wyznaczy wartość obwodu **i** na tym zakończy lub wyznaczając pole trójkąta popełni błędy **lub**

- Wyznaczy z błędem rachunkowym h z poprawnie zapisanego równania $h = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} + 3\sqrt{3}$ i wyznaczy z błędem rachunkowym długość boku a, ale konsekwentnie do popełnionego błędu poprawnie wyznaczy wartość pola **i** obwodu trójkąta ABC.

1 punkt – gdy

- poprawnie wyznaczy wysokość trójkąta $h = 6\sqrt{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy np. zapisze niewłaściwy wzór na wysokość trójkąta równobocznego **lub**
- zapisze, że $h = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} + 3\sqrt{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy inne niż omawiane wyżej **lub**
- poprawnie ułoży równanie $\frac{a\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ i na tym zakończy **lub**
- poprawnie ułoży równanie $\frac{a\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ i rozwiąże to równanie z błędem rachunkowym i na tym zakończy **lub**
- poprawnie ułoży równanie $\frac{a\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ i rozwiąże to równanie z błędem rachunkowym i z błędem wyznaczy pole **i** obwód trójkąta **lub**
- poprawnie ułoży równanie $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2 = a^2$ i na tym zakończy **lub**
- poprawnie ułoży równanie $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2 = a^2$ i rozwiąże to równanie z błędem rachunkowym i na tym zakończy **lub**
- poprawnie ułoży równanie $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2 = a^2$ i rozwiąże to równanie z błędem rachunkowym i z błędem wyznaczy pole **i** obwód trójkąta **lub**
- Zapisze słownie treść twierdzenia Vivianiego.

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Uwaga:

Uczeń może wyznaczyć długość boku trójkąta nie zapisując żadnego równania z niewiadomą a, akceptujemy wyznaczoną długość boku trójkąta na rysunku pomocniczym.

Zadanie 22. (4 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **4**

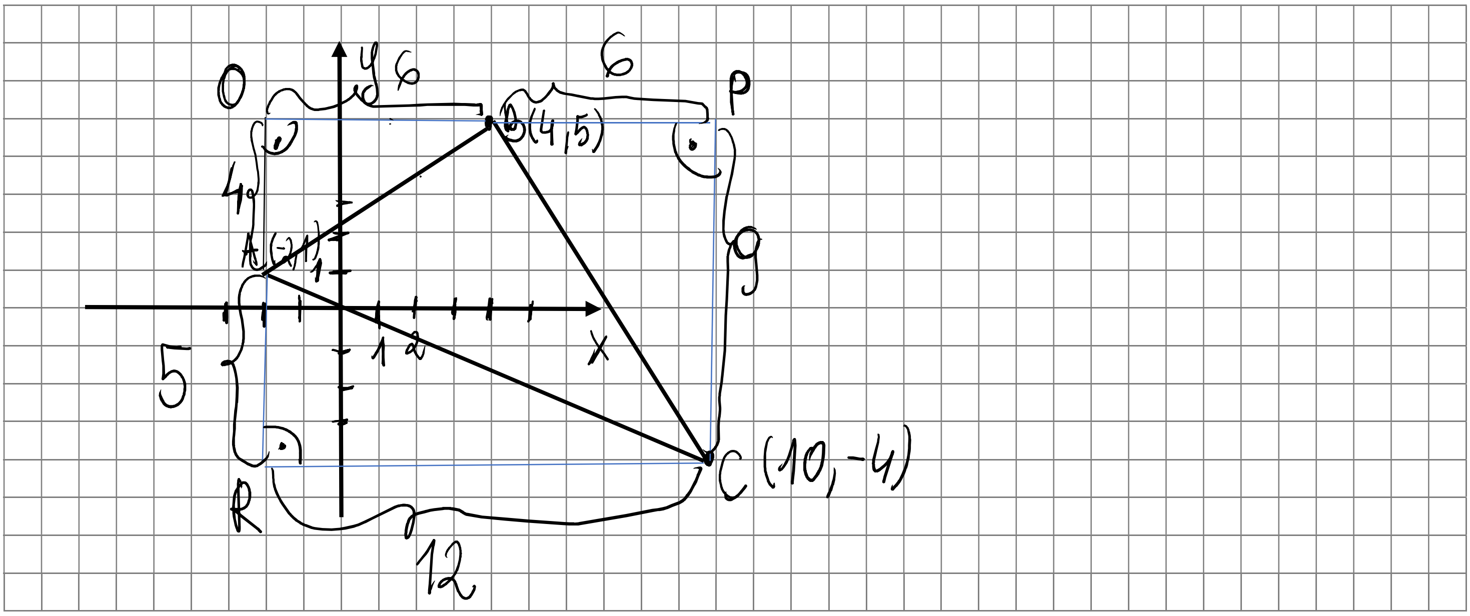
Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach A (-2,1) B (4,5), C (10,-4) jest prostokątny.

Przykładowe rozwiązania

Sposób I

Zaznaczmy wierzchołki trójkąta w prostokątnym układzie współrzędnych i obliczmy długości boków trójkąta ABC wykorzystując twierdzenie Pitagorasa w trójkątach ABO i CPB i CAR

Rys. pomocniczy



1. $4^2 + 6^2 = |AB|^2$ i $6^2 + 9^2 = |BC|^2$ i $5^2 + 12^2 = |AC|^2$
2. $|AB| = \sqrt{52}$ i $|BC| = \sqrt{117}$ i $|AC| = 13$
3. Zauważmy, że kwadrat długości najdłuższego boku trójkąta jest równy sumie kwadratów długości dwóch krótszych boków.

$$\sqrt{52}^2 + \sqrt{117}^2 = 13^2$$
$$52 + 117 = 169$$
$$169 = 169$$
$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$

4. Zatem na mocy twierdzenia odwrotnego do Pitagorasa trójkąt ABC jest prostokątny.

Sposób II

Dany jest trójkąt ABC, gdzie A (-2,1), B (4,5), C (10,-4). Obliczmy długości boków tego trójkąta ze wzoru na długość odcinka w prostokątnym układzie współrzędnych.

1. $|AB| = \sqrt{(4-(-2))^2 + (5-1)^2} = \sqrt{(6)^2 + (4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

$$|AC| = \sqrt{(10-(-2))^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$$

$$|BC| = \sqrt{(10-4)^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{6^2 + (-9)^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117}$$

2. Zauważmy, że kwadrat długości najdłuższego boku trójkąta jest równy sumie kwadratów długości dwóch krótszych boków.

$$\sqrt{52}^2 + \sqrt{117}^2 = 13^2$$
$$52 + 117 = 169$$
$$169 = 169$$
$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$

3. Zatem na mocy twierdzenia odwrotnego do Pitagorasa trójkąt ABC jest prostokątny.

<u>Sposób III</u>

Aby udowodnić, że trójkąt ABC jest prostokątny wystarczy udowodnić, że proste BA i BC są prostopadłe.

1. Przez a_{BA} oznaczmy współczynnik kierunkowy prostej BA, a przez a_{BC} oznaczmy współczynnik kierunkowy prostej BC.
2. Zatem $a_{BA} = \frac{5-1}{4-(-2)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ i $a_{BC} = \frac{-4-5}{10-4} = \frac{-9}{6} = -\frac{3}{2}$
3. $a_{BA} \cdot a_{BC} = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$. Iloczyn współczynników kierunkowych prostych BA i BC jest równy -1, zatem proste BA i BC są prostopadłe czyli trójkąt ABC jest prostokątny.

<u>Sposób IV</u>

Aby udowodnić, że trójkąt ABC jest prostokątny wystarczy udowodnić, że proste BA i BC są prostopadłe.

1. Wyznaczmy równanie kierunkowe prostej BA:

$$y = ax + b$$

Prosta BA przechodzi przez punkty A (-2,1) i B (4,5)

$$\begin{cases} 1 = -2a + b \\ 5 = 4a + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} -1 = 2a - b \\ 5 = 4a + b \end{cases}$$

$$4 = 6a \text{ czyli } a = \frac{2}{3}\ i\ b = \frac{7}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3} - równanie\ prostej\ AB$$

2. Wyznaczmy równanie kierunkowe prostej BC:

$$y = ax + b$$

Prosta BC przechodzi przez punkty B (4,5) i C (10,-4)

$$\begin{cases} 5 = 4a + b \\ -4 = 10a + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} -5 = -4a - b \\ -4 = 10a + b \end{cases}$$

$$-9 = 6a \text{ czyli } a = \frac{-9}{6} = -\frac{3}{2}\ i\ b = 11$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 11 - równanie\ prostej\ BC$$

3. $\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$. Zatem iloczyn współczynników kierunkowych prostych BA i BC jest równy -1, czyli proste BA i BC są prostopadłe co dowodzi, że trójkąt ABC jest prostokątny.

Zasady oceniania: (sposób I i II) Uczestnik otrzymuje:

4 punkty – gdy

- poprawnie rozwiąże zadanie i uzasadni, że trójkąt ABC jest prostokątny.

3 punkty – gdy

- poprawnie wyznaczy długości boków trójkąta ABC i zapisze, że $|AB| = \sqrt{52}$ i $|BC| = \sqrt{117}$ i $|AC| = 13$ i na tym zakończy lub niepoprawnie uzasadni, że trójkąt ABC jest prostokątny **lub**
- poprawnie wyznaczy długości dwóch z trzech boków trójkąta ABC i błędnie trzeci bok oraz zapisze warunek wynikający z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

2 punkty – gdy

- poprawnie wyznaczy długości dwóch z trzech boków trójkąta ABC i błędnie trzeci bok i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy tylko długość jednego z trzech boków trójkąta ABC i dwa błędnie oraz zapisze warunek wynikający z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**

1 punkt – gdy

- poprawnie wyznaczy tylko długość jednego z trzech boków trójkąta ABC i dwa błędnie i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- gdy zapisze warunek wynikający z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa np. $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$ i na tym zakończy np. lub dalej popełni błędy **lub**
- wszystkie trzy długości boków trójkąta będą wyznaczone z błędem, ale uczestnik przyjął poprawną strategię wyznaczania długości boków trójkąta ABC np. stosował poprawne wzory i popełnił błędy rachunkowe lub korzystał z twierdzenia Pitagorasa **lub**

- zapisał przynajmniej jedno poprawne równanie $4^2 + 6^2 = |AB|^2$ lub $6^2 + 9^2 = |BC|^2$ lub $5^2 + 12^2 = |AC|^2$ i na tym zakończył dalej popełnił błędy

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Uwagi:

- Akceptujemy długość boku $|AC| = \sqrt{169}$
- Jeśli uczeń rozwiązując zadanie, błędnie zaznaczy jeden z punktów w prostokątnym układzie współrzędnych to za całe zadanie maksymalnie może otrzymać **3 punkty**
- Jeśli uczeń rozwiązując zadanie, błędnie zaznaczy dwa punkty w prostokątnym układzie współrzędnych to za całe zadanie maksymalnie może otrzymać **2 punkty**
- Jeśli uczeń rozwiązując zadanie, błędnie zaznaczy wszystkie punkty w prostokątnym układzie współrzędnych to za całe zadanie maksymalnie może otrzymać **1 punkt**
- Uczeń może wyznaczyć długości boków trójkąta nie zapisując żadnego równania. Wystarczy, że zaznaczy wierzchołki trójkąta na rysunku pomocniczym w prostokątnym układzie współrzędnych i długości boków trójkąta obliczy w pamięci
- Przyznając maksymalną ilość punktów nie oczekujemy od ucznia wyraźnie zapisanego komentarza o wykorzystaniu twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa. Wystarczy, że uczeń zapisze równania: np.

$$\sqrt{52}^2 + \sqrt{117}^2 = 13^2$$
$$52 + 117 = 169$$
L=P

Zasady oceniania: (sposób I i II) Uczestnik otrzymuje:

4 punkty – gdy

- poprawnie rozwiąże zadanie i uzasadni, że trójkąt ABC jest prostokątny.

3 punkty – gdy

- wyznaczy poprawnie współczynniki kierunkowe prostych BC i BA równe odpowiednio $-\frac{3}{2}$ i $\frac{2}{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy jeden ze współczynników kierunkowych, a drugi z błędem rachunkowym i zapisze warunek prostopadłości prostych i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- gdy poprawnie wyznaczy równanie kierunkowe jednej z prostych BC lub BA, a drugie równanie z błędnym współczynnikiem kierunkowym i zapisze warunek prostopadłości prostych i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

2 punkty – gdy

- gdy z błędami rachunkowymi wyznaczy współczynniki kierunkowe prostych BC i BA i zapisze warunek prostopadłości prostych i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- gdy poprawnie wyznaczy tylko jeden współczynnik kierunkowy i na tym zakończy lub dalej popełnił błędy **lub**
- gdy poprawnie wyznaczy równanie kierunkowe jednej z prostych BC lub BA i na tym zakończy lub dalej popełnił błędy

1 punkt – gdy

- poprawnie zapisze układ równań, z którego mógłby wyznaczyć współczynnik kierunkowy jednej z prostych BA lub BC i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie ułoży równanie, w którym niewiadomą jest współczynnik kierunkowy jednej z prostych BA lub BC i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zastosuje poprawny wzór na współczynnik kierunkowy jednej z prostych BA lub BC i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Uwaga

- Przyznając maksymalną liczbę punktów nie oczekujemy od ucznia wyraźnie zapisanego komentarza, o warunku prostopadłości wystarczy, że uczeń zapisze, że $\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$.

Zadanie 23. (3 p.)	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Ogon wielkiej ryby waży 3kg. Głowa tej ryby waży tyle, ile ogon i trzecia część tułowia, a tułów tyle, ile głowa i ogon. Ile waży ryba ?

Przykładowe rozwiązanie

Dane:

3 kg – waga ogona ryby

Szukane: waga ryby ?

$g -$ *waga głowy ryby w kilogramach*

$t -$ *waga tułowia ryby w kilogramach*

$g + t + 3 -$ *waga ryby w kilogramach*

$$\begin{cases} g = 3 + \frac{t}{3} \\ t = g + 3 \end{cases}$$

$$t = 3 + \frac{t}{3} + 3$$

$$\frac{2}{3}t = 6, \ \ Zatem \ \ t = 9 \quad i \quad g = 6$$

Ryba waży 18 kg

Zasady oceniania: Uczestnik otrzymuje:

3 punkty –gdy

- poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że waga ryby wynosi 18 kg
- poda odpowiedź, że waga ryby wynosi 18 kg, waga tułowia ryby wynosi 9 kg i waga głowy ryby wynosi 6 kg, ale sprawdzi, że otrzymane liczby spełniają wszystkie warunki zadania.

2 punkty –gdy

- poprawnie wyznaczy wagę tułowia ryby równą 9 kg i wagę głowy ryby równą 6 kg i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy wagę tułowia ryby równą 9 kg i z błędem wagę głowy i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie **lub**
- poprawnie wyznaczy wagę głowy ryby równą 6 kg i z błędem wagę tułowia ryby i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie **lub**
- poprawnie zapisze układ równań np. $\begin{cases} g = 3 + \frac{t}{3} \\ t = g + 3 \end{cases}$ i rozwiązując go błędnie wyznaczy np. g lub t i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie **lub**
- poprawnie zapisze równanie z jedną niewiadomą np. $t = 3 + \frac{t}{3} + 3$ lub $g = 3 + \frac{g+3}{3}$ i rozwiąże to równanie z błędem rachunkowym, ale konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie.

1 punkty –gdy

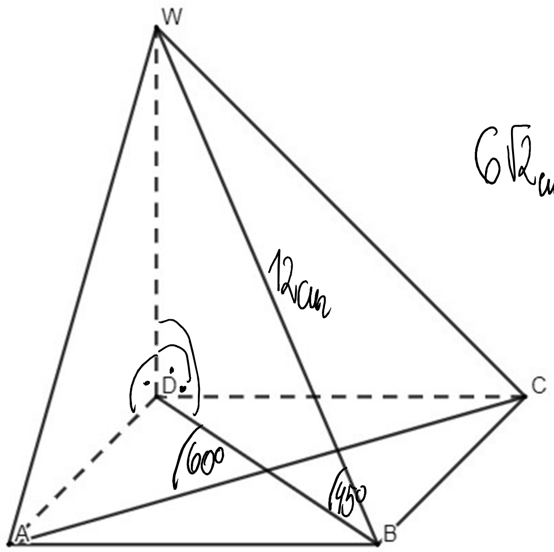
- poprawnie zapisze układ równań np. $\begin{cases} g = 3 + \frac{t}{3} \\ t = g + 3 \end{cases}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie zapisze równanie z jedną niewiadomą np. $t = 3 + \frac{t}{3} + 3$ lub $g = 3 + \frac{g+3}{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poda tylko odpowiedź, że ryba waży 18 kg i nie sprawdzi warunków zadania.

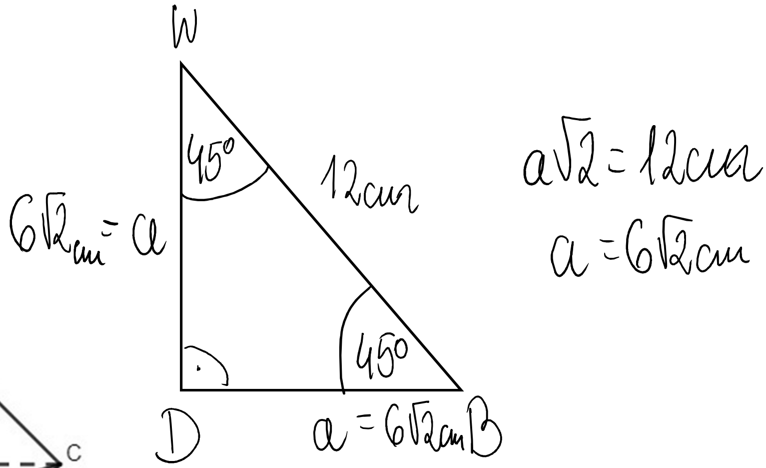
0 punktów –gdy **–** rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

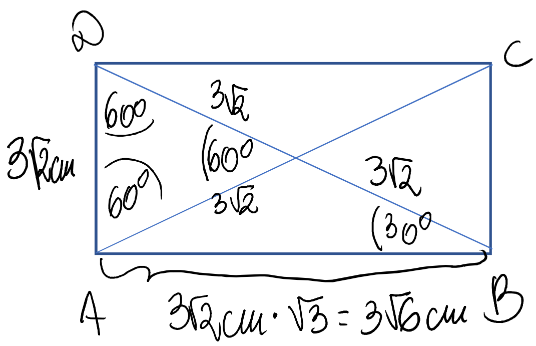
Zadanie 24. (5 p.) Liczba uzyskanych punktów: ___/ **5**

Podstawą ostrosłupa ABCDW jest prostokąt ABCD, krawędź boczna DW jest wysokością tego ostrosłupa. Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeśli najdłuższa krawędź boczna ma długość równą 12 cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°, a przekątne podstawy przecinają się pod kątem 60°.

Przykładowe rozwiązanie







$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h$ $gdzie$ $P_p = 3\sqrt{2}\ cm \cdot 3\sqrt{6}\ cm = 9\sqrt{12}\ cm^2 = 18\sqrt{3}\ cm^2$ i $h = 6\sqrt{2}\ cm$

$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 18\sqrt{3}\ cm^2 \cdot 6\sqrt{2}\ cm = 36\sqrt{6}\ cm^3$

Objętość ostrosłupa jest równa $36\sqrt{6}\ cm^3$.

Zasady oceniania: Uczestnik otrzymuje:

5 punktów – gdy

- poprawnie rozwiąże zadanie i obliczy objętość ostrosłupa równą $36\sqrt{6}\ cm^3$.

4 punkty – gdy

- poprawnie wyznaczy pole podstawy $P_{\mathrm{p}} = 18\sqrt{3}\ cm^2$ i poprawnie wyznaczy wysokość ostrosłupa $h = 6\sqrt{2}\ cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy wysokość ostrosłupa $h = 6\sqrt{2}\ cm$, poprawnie wyznaczy długości boków podstawy i popełni błąd rachunkowy przy wyznaczaniu pola podstawy, ale konsekwentnie do popełnionego błędu bezbłędnie wyznaczy objętość ostrosłupa **lub**
- zastosuje odpowiedni warunek do wyznaczenia wysokości ostrosłupa i przekątnej prostokąta, ale popełni błąd rachunkowy przy wyznaczaniu długości wysokości ostrosłupa i przekątnej prostokąta i konsekwentnie do popełnionego błędu bezbłędnie rozwiąże zadanie do końca **lub**
- poprawnie wyznaczy wysokość ostrosłupa $h = 6\sqrt{2}\ cm$ i przekątną prostokąta, ale wyznaczając długości boków podstawy popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do popełnionego błędu bezbłędnie rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie **lub**

3 punkty – gdy

- poprawnie wyznaczy wysokość ostrosłupa $h = 6\sqrt{2}\ cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy przekątną podstawy równą d=$6\sqrt{2}\ cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

2 punkty – gdy

- zaznaczy na rysunku kąt nachylenia najdłuższej krawędzi BW do płaszczyzny podstawy i zapisze, że najdłuższa krawędź ostrosłupa to $|BW| = 12\ cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zaznaczy na rysunku kąt nachylenia najdłuższej krawędzi BW do płaszczyzny podstawy i zapisze przynajmniej jedną zależność między bokami np. w trójkącie ABD np. $|AB| = |AD| \cdot \sqrt{3}$ lub$|BD| = 2 \cdot |AD|$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze poprawne równanie np. $|DW| \cdot \sqrt{2} = 12\ cm\ lub\ |BD| \cdot \sqrt{2} = 12\ cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

1 punkt - gdy

- zapisze, że najdłuższa krawędź ostrosłupa to $|BW| = 12\ cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zaznaczy na rysunku kąt nachylenia najdłuższej krawędzi BW do płaszczyzny podstawy i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze przynajmniej jedną zależność między bokami np. w trójkącie ABD np. $|AB| = |AD| \cdot \sqrt{3}$ lub$|BD| = 2 \cdot |AD|$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zauważy, że trójkąt BWD jest prostokątny i równoramienny i zapisze $|DW| = |DB|$

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Uwagi

- Jeśli uczestnik zapisując objętość pominie jednostki to za zadanie otrzymuje maksymalną liczbę punktów.
- Akceptujemy zapisywanie etapów rozwiązania na rysunkach pomocniczych. Uczeń nie musi układać równań aby wyznaczyć odpowiednie długości krawędzi ostrosłupa.