Login uczestnika | **Pieczęć szkoły** | **Data urodzenia uczestnika**

……………………………………………………

Dzień Miesiąc Rok

Wojewódzki Konkurs Matematyczny

dla uczniów szkół podstawowych województwa wielkopolskiego – stopień szkolny 2021/2022

„Matematyka - uniwersalny klucz do przyszłości"

Instrukcja dla uczestnika

1. Sprawdź, czy test zawiera **18 stron**. Ewentualny brak stron lub inne usterki zgłoś Komisji Konkursowej przed rozpoczęciem konkursu.
2. Czytaj uważnie wszystkie teksty i zadania. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra piszącego czarnym lub niebieskim kolorem. Nie używaj korektora.
3. Test, do którego przystępujesz, zawiera **24 zadania.** Wśród nich są zadania zamknięte, zadania typu prawda/fałsz oraz zadania otwarte wymagające krótszej lub dłuższej odpowiedzi.
4. W każdym **zadaniu zamkniętym** wybierz tylko **jedną odpowiedź** i zamaluj długopisem/piórem odpowiednią kratkę na karcie odpowiedzi, np. gdy wybrałeś odpowiedź „**A**":

A	B	C	D

   Jeśli się pomylisz, błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz inną odpowiedź, np.:

A	B	C	D

   Za każdą poprawnie udzieloną odpowiedź otrzymasz jeden punkt, a za odpowiedzi błędne lub brak odpowiedzi – zero punktów.
5. W zadaniach **prawda – fałsz** oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe, np. gdy wybrałeś odpowiedź „**P**":

P	F

   Jeśli się pomylisz, błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz inną odpowiedź, np.:

P	F
6. W zadaniach **otwartych** zapisz rozwiązania starannie i czytelnie w miejscach wyznaczonych przy poszczególnych zadaniach. Pamiętaj, że pominięcie uzasadnienia lub części obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów. Pomyłki przekreślaj (nie stosuj korektora).
7. Rozwiązując zadania, możesz korzystać z przyborów geometrycznych (linijki i cyrkla) oraz ze strony oznaczonej jako **brudnopis**. Zapisy w brudnopisie nie będą sprawdzane i oceniane.
8. Podczas trwania konkursu nie możesz korzystać z żadnych pomocy naukowych (w tym również kalkulatora i urządzeń elektronicznych) oraz podpowiedzi kolegów – narażasz ich i siebie na dyskwalifikację. Nie możesz także zwracać się do komisji konkursowej w kwestiach dotyczących treści zadań.
9. Za rozwiązanie całego testu możesz otrzymać maksymalnie **40 punktów**. Do stopnia rejonowego zakwalifikują się uczniowie, którzy zdobędą co najmniej **80% punktów, czyli 32 punkty.**
10. Na udzielenie odpowiedzi masz **90 minut.**

Życzymy Ci powodzenia!

Wypełnia Szkolna Komisja Konkursowa (po rozkodowaniu pracy)

……………………………………………………………………

Imię i nazwisko uczestnika **Liczba uzyskanych punktów** ……… **/ 40**

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Dana jest dwudziestocyfrowa liczba: $411111111111111111x4$. Jeśli jest ona podzielna przez 12, to cyfra x może wynosić:

A. 5 B. 2 C. 0 D. 3

Zadanie 2. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych, których iloczyn cyfr wynosi 8?

A. 9 B. 7 C. 11 D. 10

Zadanie 3. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Ola zapisała liczbę 2012^{2012}. Ostatnią cyfrą tej liczby jest:

A. 2 B. 8 C. 4 D. 6

Zadanie 4. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Jabłka są o 20% tańsze od śliwek, a gruszki są o 40% droższe od śliwek. O ile procent gruszki są droższe od jabłek?

A. 75% B. 60% C. 25% D. 80%

Zadanie 5. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

W trójkącie prostokątnym równoramiennym odległość wierzchołka kąta prostego od przeciwprostokątnej jest równa 5. Pole tego trójkąta jest równe:

A. 100 B. 12,5 C. 25 D. 50

Zadanie 6. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Ciało ludzkie zawiera około 5,5 litrów krwi. W każdym milimetrze sześciennym krwi znajduje się około 5 milionów czerwonych ciałek krwi. Zatem w krwi człowieka czerwonych ciałek krwi jest około:

A. $27{,}5 \cdot 10^9$ B. $2{,}75 \cdot 10^{14}$ C. $275 \cdot 10^9$ D. $27{,}5 \cdot 10^{12}$

Zadanie 7. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

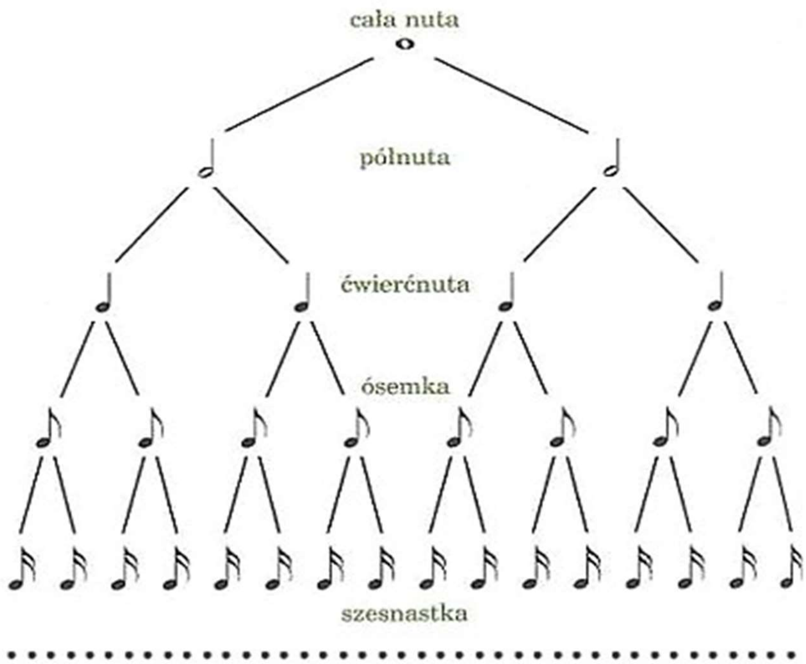
Liczbą przeciwną do rozwiązania równania $x(x-8) = x(x+7) - 4x + 33$ jest?

A. 3 B. –3 C. 11 D. -11

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Zadanie 8.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Na rysunku przedstawiono podział wartości rytmicznych nut.



Najdrobniejszą wartością nuty jest  stodwudziestoósemka, w całej nucie mieści się ich sto dwadzieścia osiem.

Ile stodwudziestoósemek mieści się w  półnucie z dwiema kropkami wiedząc, że kropka stojąca przy nucie przedłuża jej wartość o połowę, a druga kropka o połowę połowy?

A. 116 B. 90 C. 112 D. 124

Zadanie 9.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Różnica miar dwóch sąsiednich kątów wewnętrznych równoległoboku jest równa 70°.
Kąt rozwarty tego równoległoboku wynosi:

A. 110° B. 135° C. 125° D. 100°

Zadanie 10.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

O ile zmniejszy się pole prostokąta o bokach długości a i 3b, jeżeli bok a zmniejszymy o 3, a drugi bok zmniejszymy trzykrotnie?

A. $2ab + 3$ B. $2ab + 3b$ C. $2ab - 3b$ D. $2a + 3b$

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Zadanie 11. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Liczba wszystkich krawędzi graniastosłupa jest o 20 większa od liczby jego ścian bocznych.
Stąd wynika, że podstawą tego graniastosłupa jest:

A. pięciokąt B. dziesięciokąt C. sześciokąt. D. dwudziestokąt

Zadanie 12. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Suma pięciu kolejnych liczb naturalnych parzystych wynosi 140. Iloraz największej i najmniejszej z tych liczb jest równy:

A. $\frac{2}{3}$ B. 2 C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{17}{13}$

Zadanie 13. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Dane są liczby 1410, 996 i 1939. Liczba znaków rzymskich potrzebna do zapisu wszystkich tych liczb jest równa:

A. 21 B. 18 C. 23 D. 16

Zadanie 14. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Na szkolnym boisku bieżnia ma cztery tory. Rozgrywając zawody przyjęto, że tylko zwycięzca każdego biegu przechodzi do następnej rundy. Ile biegów trzeba rozegrać, aby wyłonić zwycięzcę, jeśli do biegu zgłosiło się 64 zawodników? (Organizatorzy zakładają, że podczas każdego biegu wykorzystana będzie maksymalna liczba torów.)

A. 16 B. 21 C. 17 D. 14

Zadanie 15. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Pewna mysz zebrała w pierwszy wrześniowy poniedziałek zapas 128 ziaren zbóż. Od następnego dnia zjadała codziennie połowę pozostałego w danym dniu zapasu ziaren. Któregoś dnia, tuż po posiłku stwierdziła, że zostało jej już tylko 1 ziarno. W jakim dniu tygodnia to się stało?

A. poniedziałek B. wtorek C. środa D. niedziela

Zadanie 16. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Wartość wyrażenia $(0{,}16^3 + 0{,}16^2 \cdot 0{,}84) : \frac{32}{125}$ jest równa:

A. 0,32 B. 0,01 C. 0,1 D. 0,5

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Zadanie 17.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

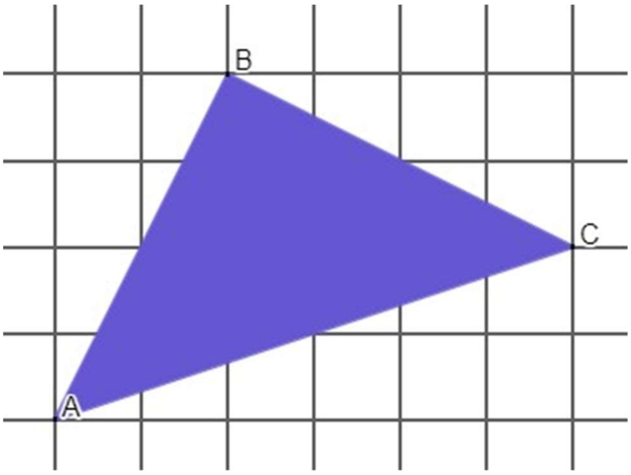
Ile jest liczb całkowitych mniejszych od liczby $\mathbf{24}$ i jednocześnie niemniejszych od liczby $(-\mathbf{22},\mathbf{9})$?

A. 46 B. 45 C. 47 D. 48

Zadanie 18.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Na rysunku przedstawiony jest trójkąt ABC. Przyjmując, że długość jednej kratki jest równa 1, to pole trójkąta ABC przedstawionego na rysunku wynosi:

Rys.



A. 12 B. 10 C. 14 D. 16

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Brudnopis (nie podlega ocenie)

ZADANIA OTWARTE

Zadanie 19.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Dane są liczby $a = \sqrt{1 + \sqrt{12 - \sqrt{7 + \sqrt{4}}}}$ i $b = \sqrt[3]{6 - \sqrt[3]{-7 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{-8}}}}$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

Wartość liczbowa wyrażenia $\sqrt{a+b}$ jest liczbą całkowitą.	P	F
Wartość liczbowa wyrażenia $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ jest liczbą większą niż 1.	P	F
Wartość liczbowa wyrażenia $\sqrt{a^2 - b^2} = b - a$.	P	F

Zadanie 20. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Dana jest liczba $k = (m + 3)(n - 2) - (n + 3)(n + 1)$, gdzie n jest pewną liczbą nieparzystą całkowitą, zaś m jest dowolną liczbą całkowitą.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

Liczba k jest zawsze nieparzysta.	P	F
Liczba k jest parzysta tylko wtedy, gdy liczba m jest nieparzysta.	P	F
Liczba k jest nieparzystą tylko wtedy, gdy liczba m jest parzysta.	P	F

Zadanie 21. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **4**

Dwóch chłopców oddalonych od siebie o 224 metry rusza naprzeciw siebie w jednej chwili. Jeżeli maszerują z prędkością odpowiednio 1,5 m/s oraz 2 m/s, to po jakim czasie się spotkają i jaki dystans pokona każdy z chłopców? Zapisz obliczenia.

Zadanie 22. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Uzasadnij, że istnieje trójkąt o polu równym $24\,cm^2$ i wysokościach równych odpowiednio $4\,cm, 6\,cm\ i\ 8\,cm$. Zapisz obliczenia i uzasadnienie.

Zadanie 23. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **4**

W pierwszy poniedziałek października na lekcji muzyki w klasie 7 b uczniów nieobecnych było **4 razy mniej** niż obecnych. Wyznacz ilu uczniów uczęszcza do klasy 7 b, jeśli w drugi poniedziałek października liczba uczniów obecnych na lekcji muzyki była **o trzy mniejsza** niż w pierwszy poniedziałek października oraz nieobecni stanowili 40 % obecnych. Zapisz obliczenia.

Zadanie 24. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **5**

Zewnętrzne wymiary donicy wykonanej z betonu, w kształcie prostopadłościanu wynoszą odpowiednio: wysokość - 1,5 dm, dno $\frac{12}{25}$ m x 10 cm. Do pustej donicy można wlać maksymalnie 6 l wody. Oblicz ile maksymalnie doniczek można wykonać mając do dyspozycji 10000 cm^3 betonu? Zapisz obliczenia.

Karta odpowiedzi zadań zamkniętych

Login uczestnika

Data urodzenia uczestnika

Dzień Miesiąc Rok

Wypełnia komisja konkursowa

Suma punktów za zadania zamknięte

Suma punktów za zadania otwarte

Suma punktów za cały arkusz

Numer zadania	Odpowiedzi				Liczba punktów
1.	A	B	C	D	
2.	A	B	C	D	
3.	A	B	C	D	
4.	A	B	C	D	
5.	A	B	C	D	
6.	A	B	C	D	
7.	A	B	C	D	
8.	A	B	C	D	
9.	A	B	C	D	
10.	A	B	C	D	
11.	A	B	C	D	
12.	A	B	C	D	
13.	A	B	C	D	
14.	A	B	C	D	
15.	A	B	C	D	
16.	A	B	C	D	
17.	A	B	C	D	
18.	A	B	C	D	

Wypełnia Szkolna Komisja Konkursowa

Suma uzyskanych punktów: ..../**40**

....
Podpis nauczyciela oceniającego (imieniem i nazwiskiem)

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Login uczestnika **Pieczęć szkoły** **Data urodzenia uczestnika**

Dzień Miesiąc Rok

…………………………………………………

Wojewódzki Konkurs Matematyczny
dla uczniów szkół podstawowych województwa wielkopolskiego
„Matematyka – uniwersalny klucz do przyszłości”

STOPIEŃ REJONOWY

Rok szkolny 2021/2022

Instrukcja dla uczestnika

1. Sprawdź, czy test zawiera **17 stron**. Ewentualny brak stron lub inne usterki zgłoś Komisji Konkursowej przed rozpoczęciem rozwiązywania testu.
2. Czytaj uważnie wszystkie teksty i zadania. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra z czarnym lub niebieskim tuszem/atramentem. Nie używaj korektora.
3. Test, do którego przystępujesz, zawiera **24 zadania**. Wśród nich są zadania zamknięte, zadania typu prawda/fałsz oraz zadania otwarte wymagające krótszej lub dłuższej odpowiedzi.
4. W każdym **zadaniu zamkniętym** wybierz tylko **jedną odpowiedź** i zamaluj długopisem/piórem odpowiednią kratkę na karcie odpowiedzi, np. gdy wybrałeś odpowiedź „**A**”:

A	B	C	D

   Jeśli się pomylisz, błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz inną odpowiedź, np.:

A	B	C	D

   Za każdą poprawnie udzieloną odpowiedź otrzymasz jeden punkt, a za odpowiedzi błędne lub brak odpowiedzi – zero punktów.
5. W zadaniach **prawda/fałsz** oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe, np. gdy wybrałeś odpowiedź „**P**”:

P	F

   Jeśli się pomylisz, błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz inną odpowiedź, np.:

P	F

6. W zadaniach **otwartych** zapisz rozwiązania starannie i czytelnie w miejscach wyznaczonych przy poszczególnych zadaniach. Pamiętaj, że pominięcie uzasadnienia lub części obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów. Pomyłki przekreślaj (nie stosuj korektora).
7. Rozwiązując zadania, możesz korzystać z przyborów geometrycznych (linijki i cyrkla) oraz ze strony oznaczonej jako **brudnopis**. Zapisy w brudnopisie nie będą sprawdzane i oceniane.
8. Podczas trwania konkursu nie możesz korzystać z żadnych pomocy naukowych (w tym również kalkulatora i urządzeń elektronicznych) oraz podpowiedzi kolegów – narażasz ich i siebie na dyskwalifikację. Nie możesz także zwracać się do Komisji Konkursowej w kwestiach dotyczących treści zadań.
9. Za rozwiązanie całego testu możesz otrzymać maksymalnie **40 punktów**. Do stopnia wojewódzkiego zakwalifikują się uczestnicy, którzy zdobędą co najmniej **85% punktów, czyli 34 punkty.**
10. Na udzielenie odpowiedzi masz **90 minut.**

Życzymy Ci powodzenia!

Wypełnia Komisja Konkursowa (po rozkodowaniu pracy)

………………………………………………………………

Imię i nazwisko uczestnika **Liczba uzyskanych punktów** ……… **/ 40**

Zadanie 1. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Kwadrat liczby $\sqrt[3]{125} \cdot \sqrt{0,09} + \sqrt[3]{-27}$ jest równy:

A. $-\frac{3}{2}$ B. 3 C. $2\frac{1}{4}$ D. $1\frac{1}{4}$

Zadanie 2. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Dwie trzecie wartości wyrażenia $\left(2\sqrt{3} - 3\right) \cdot \left(2\sqrt{3} + 3\right)$ zwiększone o 3 jest liczbą równą:

A. 3 B. 5 C. 24 D. 6

Zadanie 3. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

14% pewnej liczby jest o 7 większe od 9% tej liczby. Jaka to liczba?

A. 140 B. 120 C. 180 D. 150

Zadanie 4. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Kasia potrzebuje 2 minut, aby obejść dookoła pewien kwadratowy plac. Ile minut zajmie jej obejście w tym samym tempie kwadratowego placu o szesnastokrotnie większej powierzchni?

A. 32 min B. 8 min C. 16 min D. 4 min

Zadanie 5. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Która z poniższych liczb jest równa liczbie $\frac{3^{2020}+3^{2021}+3^{2022}+3^{2023}}{40}$?

A. 3^{2020} B. $\frac{3^{8086}}{40}$ C. $\frac{39}{40} \cdot 3^{2020}$ D. $\frac{3^{2020}}{4}$

Zadanie 6. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

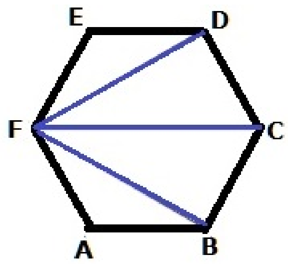
Sześcioosobowa rodzina wynajęła podczas weekendu apartament z dwiema łazienkami, z których korzystają codziennie rano od godziny 7:00. Na poranną toaletę potrzebują odpowiednio: 8, 10, 12, 17, 21 i 22 minuty. Z żadnej z łazienek nie korzystają jednocześnie dwie osoby i każdy członek rodziny korzysta tylko z jednej łazienki. Jaki jest najwcześniejszy moment, w którym mogą skończyć poranną toaletę?

A. 7:45 B. 7:46 C. 7:47 D. 7:48

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Zadanie 7. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

W sześciokącie foremnym ABCDEF o boku „a" poprowadzono przekątne z wierzchołka F (rysunek). Suma przekątnych tych trzech długości wynosi:



A. 3a B. $3(a\sqrt{3} + a)$ C. $2a(\sqrt{3} + 1)$ D. $a(\sqrt{3} + 1)$

Zadanie 8. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych wylosowano jedną liczbę. Prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba jest podzielna przez 10 wynosi:

A. $\frac{10}{89}$ B. $\frac{9}{89}$ C. $\frac{1}{11}$ D. $\frac{1}{10}$

Zadanie 9. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Liczba *x* jest rozwiązaniem poniższego równania. Oblicz sumę liczby przeciwnej i liczby odwrotnej do *x*.

$$\frac{4x+1}{5} = 2 - \frac{4-8x}{3}$$

A. $-\frac{1}{4}$ B. $-3\frac{3}{4}$ C. -4 D. $-4\frac{1}{4}$

Zadanie 10. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

W pewnej 30-osobowej klasie 16 uczniów jeździ na nartach, a 10 – gra w hokeja.
Ilu uczniów z tej klasy nie uprawia żadnego z wymienionych sportów, jeśli połowa uczniów grających w hokeja jeździ także na nartach ?

A. 0 B. 12 C. 4 D. 9

Zadanie 11. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Długości przekątnych rombu różnią się o 15 cm, a stosunek ich długości jest równy 2:7. Pole tego rombu jest równe:

A. 14 cm^2 B. 21 dm^2 C. 63 cm^2 D. 42 cm^2

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Zadanie 12.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Średni wiek w ośmioosobowym zespole muzycznym był równy 27 lat. Po opuszczeniu tego zespołu przez perkusistę średnia wieku wzrosła do 28 lat. Ile lat miał perkusista, który opuścił zespół?

A. 20 B. 25 C. 26 D. 27

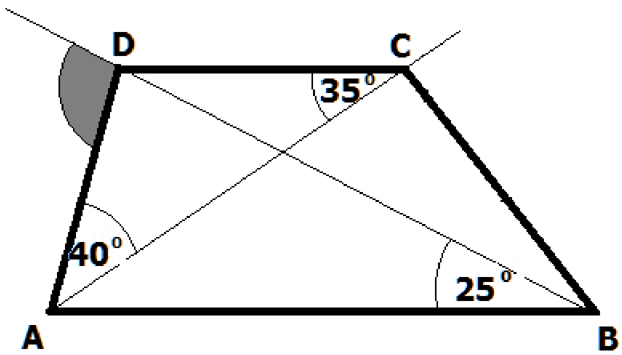
Zadanie 13.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Alicja kupiła x kg gruszek i 4 kg jabłek. Za owoce zapłaciła 26 zł. Wiadomo, że 1 kg gruszek był o 2 zł droższy od 1 kg jabłek. Wybierz spośród podanych odpowiedzi wyrażenie algebraiczne, które opisuje cenę zakupu 1 kilograma gruszek.

A. $\frac{34}{x+4}$ B. $\frac{30}{x+4}$ C. $\frac{32}{x+4}$ D. $\frac{26}{x+4}$

Zadanie 14.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Czworokąt ABCD przedstawiony na rysunku jest trapezem, zatem miara kąta zaznaczonego na rysunku wynosi:



A. 65° B. 80° C. 100° D. 115°

Zadanie 15.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Akwarium napełnione do pełna wodą waży 110 kg, a napełnione do połowy 70 kg. Ile waży puste akwarium?

A. 40 kg B. 30 kg C. 20 kg D. 15 kg

Zadanie 16.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Zbiornik o pojemności 4800 l napełniono wodą, wlewając $0{,}6\ m^3$ wody w czasie 5 minut. Ile czasu trwało napełnianie tego zbiornika?

A. 30 minut B. 40 minut C. 1 godzinę D. 1200 sekund

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Zadania otwarte

Zadanie 17. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Pan Jerzy przeznaczył pewną kwotę na kieszonkowe dla swoich trzech córek. Najstarsza – Anna dostała 45% kwoty, średnia – Ola otrzymała $\frac{3}{5}$ pozostałej kwoty, a najmłodsza – Kasia otrzymała resztę kwoty czyli 55 zł.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

Tata przeznaczył na kieszonkowe kwotę, która jest podzielna przez 3.	P	F
Ola dostała kieszonkowego więcej niż 90 zł.	P	F
Kieszonkowe Oli jest o jest o 50 % większe od kieszonkowego Kasi.	P	F

Zadanie 18. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Przekątne trapezu równoramiennego są prostopadłe, a wysokość tego trapezu jest równa 5 cm.

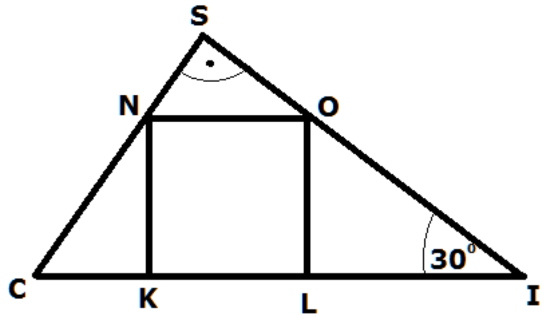
Oceń prawdziwość podanych zdań.

Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

Istnieje więcej niż jeden trapez o takich własnościach.	P	F
Suma długości podstaw tego trapezu jest równa 20 cm.	P	F
Pole tego trapezu jest równe 25 cm^2.	P	F

Zadanie 19. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

W trójkąt prostokątny CIS (zamieszczonym na rysunku poniżej) wpisano kwadrat KLON, którego pole jest równe 36 cm^2.



Oceń prawdziwość podanych zdań.

Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

Pole trójkąta CKN jest równe $18\sqrt{3}\,cm^2$.	P	F
Obwód trójkąta CIS jest równy $\left(21+15\sqrt{3}\right)$ cm.	P	F
Pole trójkąta ILO jest trzy razy większe od pola trójkąta CKN.	P	F

Zadanie 20.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Wymiary prostopadłościanu są kolejnymi liczbami naturalnymi podzielnymi przez 3. Suma długości wszystkich jego krawędzi jest równa 108 cm. Oblicz objętość tego prostopadłościanu. Zapisz wszystkie obliczenia.

Zadanie 21.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **2**

Udowodnij, że jeżeli od dowolnej liczby dwucyfrowej dodatniej odejmiemy sumę jej cyfr, to otrzymana różnica jest wielokrotnością liczby 9. Zapisz wszystkie obliczenia.

Zadanie 22.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest o 1 cm krótsza od przeciwprostokątnej, a druga przyprostokątna ma długość równą 5 cm. Oblicz długość przeciwprostokątnej i pole tego trójkąta. Zapisz wszystkie obliczenia.

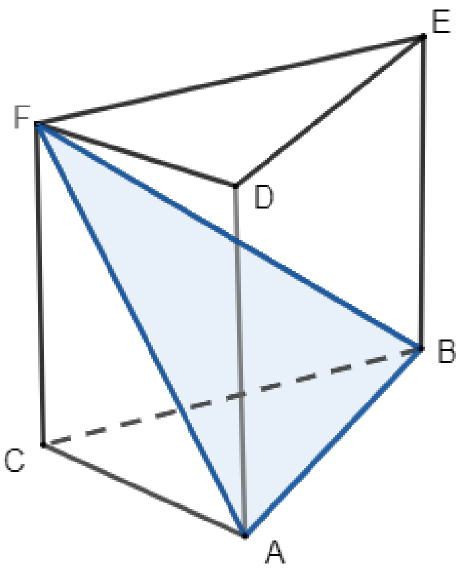
Zadanie 23. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} \frac{x-2y}{3} - \frac{4-2x}{6} = 3 \\ \frac{2+x}{3} - 2y = 5 \end{cases}$.

Zapisz wszystkie obliczenia.

Zadanie 24. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **4**

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny ABCDEF o podstawach ABC i DEF i krawędziach bocznych AD, BE i CF (zobacz rysunek). Długość krawędzi podstawy AB jest równa 6, a pole trójkąta ABF jest równe 54. Oblicz objętość tego graniastosłupa. Zapisz wszystkie obliczenia.



Brudnopis (nie podlega ocenie)

Karta odpowiedzi zadań zamkniętych

Login uczestnika

Data urodzenia uczestnika

Dzień Miesiąc Rok

Numer zadania	Odpowiedzi				Liczba punktów
1.	A	B	C	D	
2.	A	B	C	D	
3.	A	B	C	D	
4.	A	B	C	D	
5.	A	B	C	D	
6.	A	B	C	D	
7.	A	B	C	D	
8.	A	B	C	D	
9.	A	B	C	D	
10.	A	B	C	D	
11.	A	B	C	D	
12.	A	B	C	D	
13.	A	B	C	D	
14.	A	B	C	D	
15.	A	B	C	D	
16.	A	B	C	D	

Wypełnia Komisja Konkursowa

Suma punktów za zadania zamknięte

Suma punktów za zadania otwarte

Suma punktów za cały arkusz

Wypełnia Komisja Konkursowa

Suma uzyskanych punktów: .... /**40**

....

Podpis nauczyciela oceniającego (imieniem i nazwiskiem)

Login uczestnika

Data urodzenia uczestnika

Dzień Miesiąc Rok

Wojewódzki Konkurs Matematyczny
dla uczniów szkół podstawowych województwa wielkopolskiego
„Matematyka – uniwersalny klucz do przyszłości”

STOPIEŃ WOJEWÓDZKI

Rok szkolny 2021/2022

Instrukcja dla uczestnika

1. Sprawdź, czy test zawiera **19 stron**. Ewentualny brak stron lub inne usterki zgłoś Komisji Konkursowej przed rozpoczęciem rozwiązywania testu.
2. Czytaj uważnie wszystkie teksty i zadania. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra piszącego czarnym lub niebieskim kolorem. Nie używaj korektora.
3. Test, do którego przystępujesz, zawiera **24 zadania**. Wśród nich są zadania zamknięte, zadania typu prawda fałsz oraz zadania otwarte wymagające krótszej lub dłuższej odpowiedzi. Zadania zamknięte to zadania od 1 do 15. Zadania prawda - fałsz to zadania 16 - 19.
4. W każdym **zadaniu zamkniętym** wybierz tylko **jedną odpowiedź** i zamaluj długopisem/piórem odpowiednią kratkę na karcie odpowiedzi, np. gdy wybrałeś odpowiedź „**A**”:

A	B	C	D

   Jeśli się pomylisz, błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz inną odpowiedź, np.:

A	B	C	D

   Za każdą poprawnie udzieloną odpowiedź otrzymasz jeden punkt, a za odpowiedzi błędne lub brak odpowiedzi – zero punktów.
5. W zadaniach **prawda – fałsz** oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe, np. gdy wybrałeś odpowiedź „**P**”:

P	F

   Jeśli się pomylisz, błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz inną odpowiedź, np.:

P	F

6. W zadaniach **otwartych** zapisz rozwiązania starannie i czytelnie w miejscach wyznaczonych przy poszczególnych zadaniach. Pamiętaj, że pominięcie uzasadnienia lub części obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów. Pomyłki przekreślaj (nie stosuj korektora).
7. Rozwiązując zadania, możesz korzystać z przyborów geometrycznych (linijki i cyrkla) oraz ze strony oznaczonej jako **brudnopis**. Zapisy w brudnopisie nie będą sprawdzane i oceniane.
8. Podczas trwania konkursu nie możesz korzystać z żadnych pomocy naukowych (w tym również kalkulatora i urządzeń elektronicznych) oraz podpowiedzi kolegów – narażasz ich i siebie na dyskwalifikację. Nie możesz także zwracać się do Komisji Konkursowej w kwestiach dotyczących treści zadań.
9. Za rozwiązanie całego testu możesz otrzymać maksymalnie **40 punktów**. Laureatami konkursu zostaną uczestnicy, którzy zdobędą co najmniej **90% punktów, czyli 36 punktów.**
10. Na udzielenie odpowiedzi masz **90 minut.**

Życzymy Ci powodzenia!

Wypełnia Komisja (po rozkodowaniu pracy)

……………………………………………………………………

Imię i nazwisko uczestnika **Liczba uzyskanych punktów** ……… **/ 40**

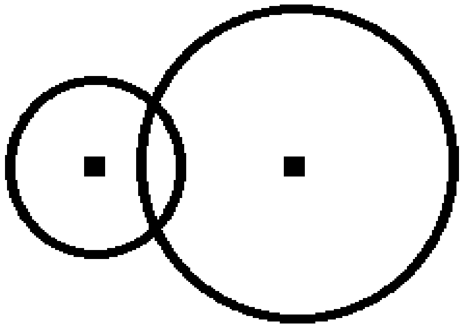
Zadanie 1. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Liczby a, b, c spełniają warunki $a+b=4$, $b+c=5$ i $a+c=3$. Zatem wyrażenie $3(a+b+c)$ wynosi:

A. 21 **B.** 12 **C.** 18 **D.** 27

Zadanie 2. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Dwa okręgi o promieniach 13 i 20 przecinają się w dwóch punktach (patrz rysunek). Cięciwa łącząca te punkty ma długość 24. Odległość środków tych okręgów jest równa?



A. 12 **B.** 16 **C.** 15 **D.** 21

Zadanie 3. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Ania napisała równanie $4x-2\cdot\blacksquare=7x+\blacksquare$, w miejsce ■ należy wstawić tę samą liczbę tak, aby rozwiązaniem równania była liczba (-5). Jaką liczbę należy wstawić w miejsce ■?

A. -5 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 5

Zadanie 4. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Rowerzysta jadący ze stałą prędkością przejechał 32 km w ciągu 5 kwadransów. Ile metrów przejechał ten rowerzysta w ciągu 2 minut i 15 sekund?

A. $1080\ m$ **B.** $1200\ m$ **C.** $850\ m$ **D.** $960\ m$

Zadanie 5. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Jeżeli ułamek $\frac{x+y}{x}=2\frac{2}{3}$, to wartość ułamka $\frac{x}{y}$ wynosi:

A. $\frac{3}{5}$ **B.** $1\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{3}{4}$

Brudnopis (nie podlega ocenie)

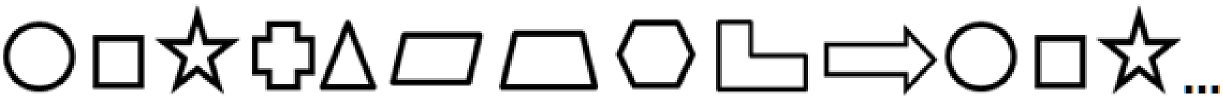
Zadanie 6.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

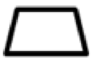
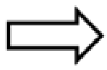
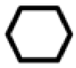
Liczba $\left(3-2\sqrt{3}\right)^2 \cdot \left(2\sqrt{3}+3\right)^2$ jest równa:

A. $21-12\sqrt{3}$ **B.** 9 **C.** 63 **D.** 333

Zadanie 7.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Na rysunku poniżej zostały ułożone figury geometryczne zgodnie z pewną zasadą. Jaka figura znajduje się na 227 miejscu?



A.  **B.**  **C.**  **D.** 

Zadanie 8.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Suma cyfr liczby $(10^{12}-77)$ wynosi:

A. 105 **B.** 95 **C.** 104 **D.** 86

Zadanie 9.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Prostokąt ma wymiary $20\ cm\ x\ 25\ cm$. Poprowadzona została dwusieczna jednego z kątów tego prostokąta, która podzieliła ten prostokąt na trójkąt prostokątny i trapez. Pole trapezu jest większe od pola trójkąta o:

A. 100% **B.** 50% **C.** 200% **D.** 25%

Zadanie 10.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Doświadczenie polega na dwukrotnym rzucie symetryczną monetą. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że przynajmniej raz otrzymamy orła wynosi:

A. 1 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{1}{4}$

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Zadanie 11. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Punkt $A = (4, -6)$ jest końcem odcinka AB, punkt B leży na osi OY, a środek S tego odcinka leży na osi OX. Wynika stąd, że:

A. $S = (0,6)$ **B.** $S = (3,0)$ **C.** $S = (-4,0)$ **D.** $S = (2,0)$

Zadanie 12. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Punkty $\mathrm{A} = (-2,6)$ i $\mathrm{C} = (4,2)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu ABCD. Pole tego kwadratu wynosi:

A. 10 **B.** 50 **C.** 26 **D.** 100

Zadanie 13. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Pudełko w kształcie prostopadłościanu ma wymiary $20\ cm\ x\ 12\ cm\ x\ 18\ cm$. Ile sześciennych klocków o krawędzi $3\ cm$ zmieści się w tym pudełku?

A. 160 **B.** 156 **C.**144 **D.** 164

Zadanie 14. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Pewien pierścień kołowy, jest wyznaczony przez dwa okręgi. Wiadomo, że promień mniejszego z nich jest równy 4, a średnica większego z większego z nich jest 3 razy dłuższy od promienia mniejszego z tych okręgów. Pole tego pierścienia kołowego wynosi:

A. 4π **B.** 20π **C.** 112π **D.** 32π

Zadanie 15. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **1**

Sprzedawczyni w sklepie zmieszała 4 kg cukierków po 25 zł za 1 kg, 6 kg cukierków po 15 zł za 1 kg. Jaka powinna być cena 1 kg takiej mieszanki cukierków?

A. $20\ zł$ **B.** $18\ zł$ **C.** $19\ zł$ **D.** $19\ zł$

Brudnopis (nie podlega ocenie)

ZADANIA OTWARTE

Zadanie 16. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDS$, jest kwadrat $ABCD$. Wszystkie krawędzie ostrosłupa $ABCDS$ mają długość 6 cm.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

Najkrótsza wysokość trójkąta ASC wynosi 6 cm.	P	F
Trójkąt ASC jest ostrokątny.	P	F
Objętość ostrosłupa $ABCDS$ jest równa $36\sqrt{2}\ cm^3$.	P	F

Zadanie 17. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Dana jest liczba $k = 3^{n+2} - 3^{n} + 4^{n+2} - 4^{n}$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną dodatnią.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

Liczba k jest wielokrotnością liczby 7.	P	F
Liczba k jest parzysta.	P	F
Liczba k jest podzielna przez 12.	P	F

Zadanie 18. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Dana jest nierówność $8 - 3x > \frac{6-x}{2}$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

Najmniejszą liczbą naturalną niespełniającą tej nierówności jest liczba 2.	P	F
Do zbioru rozwiązań nierówności należy nieskończenie wiele liczb dodatnich.	P	F
Dwie liczby pierwsze spełniają tę nierówność.	P	F

Zadanie 19. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **4**

Tomek za dwa lata będzie dwa razy starszy niż był dwa lata temu, a Krzysztof za trzy lata będzie cztery razy starszy niż przed trzema laty.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

Tomek jest o 2 lata starszy od Krzysztofa.	P	F
Za 10 lat razem będą mieli 31 lat.	P	F
Tomek i Krzysztof są w tym samym wieku.	P	F
Cztery lata temu Tomek miał dwa razy więcej lat niż Krzysztof.	P	F

Zadanie 20.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **2**

Paweł i jego brat Arek postanowili kupić piłkę do koszykówki. Paweł przekazał na ten cel kwotę równą 40% ceny piłki i jeszcze 20 zł, a Arek – kwotę równą 20% jej ceny i jeszcze 40 zł. Tata dołożył brakujące 60 zł. Ile kosztowała piłka. Zapisz obliczenia i podaj odpowiedź.

Odpowiedź: ……

Zadanie 21.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Prostopadłościenny zamknięty karton o pojemności $1{,}8\ litra$ jest częściowo wypełniony sokiem. Gdy stoi na ścianie o najmniejszym polu, poziom soku sięga do wysokości $1{,}5\ cm$, gdy na średniej ścianie – sok osiąga poziom $1{,}2\ cm$, gdy zaś na największej – sok sięga do wysokości $1\ cm$. Jaka jest objętość soku w kartonie? Zapisz obliczenia i podaj odpowiedź.

Odpowiedź: ……

Zadanie 22.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **2**

Dana jest liczba $a = \sqrt{333^2 + 444^2}$ wykaż, że liczba a jest liczbą całkowitą podzielną przez pięć. Zapisz rozwiązanie i podaj uzasadnienie.

Uzasadnienie: ……

Zadanie 23. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Iloczyn dwóch liczb dwucyfrowych dodatnich jest równy 825. Wyznacz te liczby, jeśli po zaokrągleniu do pełnych dziesiątek iloczyn tych zaokrągleń wynosi 800. Zapisz obliczenia i podaj odpowiedź.

Odpowiedź: ……

Zadanie 24. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **2**

Pan Andrzej bardzo lubi ubrania w kratkę, każdego dnia ubierając się wybiera ze swojej szafy koszulę oraz marynarkę. Pan Andrzej posiada 10 różnych koszul, wśród których 3 są w kratkę i 7 różnych marynarek, wśród których dokładnie 2 są w kratkę. Pan Andrzej każdego dnia wybiera marynarkę lub koszulę w kratkę, ale nigdy nie założy jednocześnie koszuli w kratkę i marynarki w kratkę. Czy pan Andrzej w miesiącu styczniu może każdego dnia wybrać inny zestaw koszuli i marynarki, który na siebie założy? Zapisz obliczenia i podaj uzasadnienie swojej odpowiedzi.

Uzasadnienie: ……

Wojewódzki Konkurs Matematyczny
dla uczniów szkół podstawowych województwa wielkopolskiego
STOPIEŃ WOJEWÓDZKI 2021/2022

Karta odpowiedzi zadań zamkniętych

Login uczestnika

Data urodzenia uczestnika

Dzień Miesiąc Rok

Numer zadania	Odpowiedzi				Liczba punktów
1.	A	B	C	D	
2.	A	B	C	D	
3.	A	B	C	D	
4.	A	B	C	D	
5.	A	B	C	D	
6.	A	B	C	D	
7.	A	B	C	D	
8.	A	B	C	D	
9.	A	B	C	D	
10.	A	B	C	D	
11.	A	B	C	D	
12.	A	B	C	D	
13.	A	B	C	D	
14.	A	B	C	D	
15.	A	B	C	D	

Wypełnia Komisja Konkursowa

Suma punktów za zadania zamknięte

Suma punktów za zadania otwarte

Suma punktów za cały arkusz

Wypełnia Komisja Konkursowa

Suma uzyskanych punktów: .... /**40**

....

Podpis osoby oceniającej (imieniem i nazwiskiem)

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Brudnopis (nie podlega ocenie)

Maksymalna liczba do uzyskania: 40 punktów.
Próg kwalifikacyjny to minimum: 32 punkty.

ZASADY/KRYTERIA OCENIANIA

1. Klucz punktowania zadań zamkniętych.

Za każdą poprawną odpowiedź uczestnik otrzymuje 1 punkt.

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Poprawna odpowiedź	B	D	D	A	C	D	A	C	C	B	B	C	B	B	A	C	A	B

2. Przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych.

Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania nieuwzględnione w schemacie punktowania przyznajemy maksymalną liczbę punktów należnych za to zadanie.

UWAGA: Nie jest wymagana od uczestnika na końcu zadania wyraźnie sformułowana odpowiedź słowna. Wystarczy, że uczestnik wyznaczy, obliczy szukaną wartość, bądź przeprowadzi argumentację w zadaniu na dowodzenie.

Zadanie 19. (3 p.)

Dane są liczby $a = \sqrt{1 + \sqrt{12 - \sqrt{7 + \sqrt{4}}}}$ i $b = \sqrt[3]{6 - \sqrt[3]{-7 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{-8}}}}$

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

Wartość liczbowa wyrażenia $\sqrt{a+b}$ jest liczbą całkowitą.	**P**	F
Wartość liczbowa wyrażenia $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ jest liczbą większą niż 1.	P	**F**
Wartość liczbowa wyrażenia $\sqrt{a^2 - b^2} = b - a$.	**P**	F

<u>Przykładowe rozwiązanie</u>

Aby ocenić prawdziwość zdań należy wyznaczyć wartości liczb $a\ i\ b$.

1. $a = \sqrt{1+\sqrt{12-\sqrt{7+\sqrt{4}}}} = \sqrt{1+\sqrt{12-\sqrt{7+2}}} = \sqrt{1+\sqrt{12-\sqrt{9}}} =$
$\sqrt{1+\sqrt{12-3}} = \sqrt{1+\sqrt{9}} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
$b = \sqrt[3]{6-\sqrt[3]{-7+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{-8}}}} = \sqrt[3]{6-\sqrt[3]{-7+\sqrt[3]{1+(-2)}}} = \sqrt[3]{6-\sqrt[3]{-7+\sqrt[3]{-1}}} =$
$\sqrt[3]{6-\sqrt[3]{-7+(-1)}} = \sqrt[3]{6-\sqrt[3]{-8}} = \sqrt[3]{6-(-2)} = \sqrt[3]{8} = 2$
2. Wartość liczbowa wyrażenia $\sqrt{a+b} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$, czyli jest liczbą całkowitą. Zatem zdanie: „Wartość liczbowa wyrażenia $\sqrt{a+b}$ jest liczbą całkowitą.” jest **zdaniem prawdziwym.**
3. Wartość liczbowa wyrażenia $\sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \sqrt[3]{\frac{2}{2}} = \sqrt[3]{1} = 1$.

   Zatem zdanie: „Wartość liczbowa wyrażenia $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ jest liczbą większą niż 1.” jest **zdaniem fałszywym.**
4. $\sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{2^2-2^2} = \sqrt{4-4} = \sqrt{0} = 0$.
$b-a = 2-2 = 0$, zatem $\sqrt{a^2-b^2} = 0 = b-a$.
Zatem zdanie: „Wartość liczbowa wyrażenia $\sqrt{a^2-b^2} = b-a$.” jest **zdaniem prawdziwym.**

Za każdą poprawną odpowiedź uczestnik otrzymuje jeden punkt. Uczestnik w tym zadaniu nie musi przedstawiać rozwiązania. Punktujemy jedynie zaznaczone odpowiedzi w tabeli.

Zasady punktacji:

3 punkty – gdy wszystkie odpowiedzi są poprawne,
2 punkty – gdy dwie odpowiedzi są poprawne,
1 punkt – gdy jedna odpowiedź jest poprawna,
0 punktów – gdy wszystkie odpowiedzi są błędne.

Zadanie 20. (3 p.)

Dana jest liczba $k = (m+3)(n-2) - (n+3)(n+1)$, gdzie n jest pewną liczbą nieparzystą całkowitą, zaś m jest dowolną liczbą całkowitą.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

Liczba k jest zawsze nieparzysta.	P	F
Liczba k jest parzysta tylko wtedy, gdy liczba m jest nieparzysta.	P	F
Liczba k jest nieparzystą tylko wtedy, gdy liczba m jest parzysta.	P	F

Przykładowe rozwiązanie

Liczba $k = (m+3)(n-2) - (n+3)(n+1)$, z założenia wiemy, że n jest pewną liczbą całkowitą nieparzystą, a m jest dowolną liczbą całkowitą.

1. Jeżeli m jest dowolną liczbą całkowitą, to czynnik $(m+3)$ jest liczbą całkowitą.

Jeśli n jest pewną liczbą całkowitą nieparzystą to czynnik $(n-2)$ jest zawsze liczbą nieparzystą, czyli iloczyn $(m+3)(n-2)$ może być zarówno liczbą parzystą jak i nieparzystą.

Jeśli n jest pewną liczbą całkowitą nieparzystą to czynnik $(n+3)$ jest zawsze liczbą parzystą i czynnik $(n+1)$ jest także zawsze liczbą parzystą. Iloczyn dwóch liczb parzystych jest zawsze liczbą parzystą. Czyli iloczyn $(n+3)(n+1)$ jest zawsze liczba parzystą.

Różnica dowolnej liczby całkowitej i liczby parzystej jest zawsze liczbą całkowitą,

Zatem zdanie: „Liczba k jest zawsze nieparzysta.” jest **zdaniem fałszywym.**

2. Skoro odjemnik $(n+3)(n+1)$ jest zawsze liczba parzystą,

to liczba $k = (m+3)(n-2) - (n+3)(n+1)$ będzie liczbą parzystą wtedy i tylko wtedy gdy odjemna $(m+3)(n-2)$ będzie liczbą parzystą. Czynnik $(n-2)$ jest zawsze liczbą nieparzystą, zatem jeśli liczba m będzie liczbą nieparzystą to czynnik $(m+3)$ będzie liczbą parzystą, czyli iloczyn $(m+3)(n-2)$ będzie liczbą parzystą, a różnica liczby parzystej i parzystej jest zawsze liczbą parzystą.

Zatem zdanie: „Liczba k jest parzysta tylko wtedy, gdy liczba m jest nieparzysta.” jest **zdaniem prawdziwym.**

3. Skoro odjemnik $(n+3)(n+1)$ jest zawsze liczba parzystą,

to liczba $k = (m+3)(n-2) - (n+3)(n+1)$ będzie liczbą nieparzystą wtedy i tylko wtedy gdy odjemna $(m+3)(n-2)$ będzie liczbą nieparzystą. Czynnik $(n-2)$ jest zawsze liczbą nieparzystą, zatem jeśli liczba m będzie liczba parzystą to czynnik $(m+3)$ będzie liczbą nieparzystą, czyli iloczyn $(m+3)(n-2)$ będzie liczbą nieparzystą, a różnica liczby nieparzystej i parzystej jest liczbą nieparzystą.

Zatem zdanie: „Liczba k jest nieparzystą tylko wtedy, gdy liczba m jest parzysta.” jest **zdaniem prawdziwym.**

Za każdą poprawną odpowiedź uczestnik otrzymuje jeden punkt. Uczestnik w tym zadaniu nie musi przedstawiać rozwiązania. Punktujemy jedynie zaznaczone odpowiedzi w tabeli.

Punktacja:

3 punkty – gdy wszystkie odpowiedzi są poprawne,
2 punkty – gdy dwie odpowiedzi są poprawne,
1 punkt – gdy jedna odpowiedź jest poprawna,
0 punktów – gdy wszystkie odpowiedzi są błędne.

Zadanie 21. (4 p.)

Dwóch chłopców oddalonych od siebie o 224 metry rusza naprzeciw siebie w jednej chwili. Jeżeli maszerują z prędkością odpowiednio 1,5 m/s oraz 2 m/s, to po jakim czasie się spotkają i jaki dystans pokona każdy z chłopców? Zapisz obliczenia.

Przykładowe rozwiązania:

Metoda I

Dane:

224 m -odległość pomiędzy chłopcami
1,5 m/s – prędkość pierwszego z chłopców
2 m/s – prędkość drugiego z chłopców

Szukane:

t – czas marszu obu chłopców do chwili spotkania wyrażony w sekundach

- Ze wzoru na drogę $s = v \cdot t$ otrzymujemy równanie:

$$1{,}5 \cdot t + 2 \cdot t = 224$$
$$3{,}5t = 224$$

$t = 64$

Ze wzoru na drogę $s = v \cdot t$ możemy obliczyć dystans pokonany przynajmniej przez jednego z chłopców.

- Droga pokonana przez pierwszego z chłopców wynosi: $1{,}5[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}] \cdot 64[s] = 96[m]$

Droga pokonana przez drugiego z chłopców wynosi $224[m]– 96[m] = 128[m]$ **lub**

- Droga pokonana przez drugiego z chłopców wynosi: $2\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \cdot 64[s] = 128[m]$

Droga pokonana przez pierwszego z chłopców wynosi $224\ [m]– 128\ [m] = 96\ [m]$ **lub**

- Droga pokonana przez pierwszego z chłopców wynosi: $1{,}5[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}] \cdot 64[s] = 96[m]$

Droga pokonana przez drugiego z chłopców wynosi: $2[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}] \cdot 64[s] = 128[m]$

Chłopcy spotkali się po 64 sekundach od momentu wyruszenia w trasę i pokonali odpowiednio 96 metrów i 128 metrów.

Metoda II

Dane:

224 m -odległość pomiędzy chłopcami
1,5 m/s – prędkość pierwszego z chłopców
2 m/s – prędkość drugiego z chłopców

Szukane:

t – czas marszu obu chłopców do chwili spotkania wyrażony w sekundach
s – droga pokonana przez pierwszego z chłopców wyrażona w metrach
$(224 - s)$ – droga pokonana przez drugiego z chłopców wyrażona w metrach

- Ze wzoru na drogę $s = v \cdot t$ lub prędkość $v = \frac{s}{t}$ otrzymujemy układy równań:

$\begin{cases} s = 1{,}5 \cdot t \\ 224 - s = 2 \cdot t \end{cases}$ **lub** $\begin{cases} 1{,}5 = \frac{s}{t} \\ 2 = \frac{224-s}{t} \end{cases}$

Rozwiązując te układy otrzymujemy układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi np.:

$$\begin{cases} s = 1{,}5 \cdot t \\ 224 - 1{,}5 \cdot t = 2 \cdot t \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = 1{,}5 \cdot t \\ 224 = 2 \cdot t + 1{,}5 \cdot t \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = 1{,}5 \cdot t \\ 224 = 3{,}5t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1{,}5 \cdot t = s \\ t = 64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = 96 \\ t = 64 \end{cases}$$

Droga drugiego z chłopców wynosi: $224\ [m] - 96\ [m] = 128\ [m]$

Chłopcy spotkali się po 64 sekundach od momentu wyruszenia w trasę i pokonali odpowiednio 96 metrów i 128 metrów.

Metoda III

Dane:
224 m -odległość pomiędzy chłopcami
1,5 m/s – prędkość pierwszego z chłopców
2 m/s – prędkość drugiego z chłopców

Szukane:

t – czas marszu obu chłopców do chwili spotkania wyrażony w sekundach
x – droga pokonana przez pierwszego z chłopców wyrażona w metrach
y – droga pokonana przez drugiego z chłopców wyrażona w metrach

- Ze wzoru na drogę $s = v \cdot t$ lub prędkość $v = \frac{s}{t}$ otrzymujemy układy równań:

$$\begin{cases} x = 1{,}5 \cdot t \\ y = 2 \cdot t \\ x + y = 224 \end{cases} \quad \textbf{lub} \quad \begin{cases} 1{,}5 = \frac{x}{t} \\ 2 = \frac{y}{t} \\ x + y = 224 \end{cases}$$

Rozwiązując te układy otrzymamy układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi np.:

$$\begin{cases} x = 1{,}5 \cdot t \\ y = 2 \cdot t \\ 1{,}5 \cdot t + 2 \cdot t = 224 \end{cases} \quad \textbf{lub} \quad \begin{cases} x = 1{,}5 \cdot t \\ y = 2 \cdot t \\ x + y = 224 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1{,}5 \cdot t \\ y = 2 \cdot t \\ 3{,}5 \cdot t = 224 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1{,}5 \cdot t \\ y = 2 \cdot t \\ t = 64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1{,}5 \cdot 64 = 96 \\ y = 2 \cdot 64 = 128 \\ t = 64 \end{cases}$$

Chłopcy spotkali się po 64 sekundach od momentu wyruszenia w trasę i pokonali odpowiednio 96 metrów i 128 metrów.

Zasady punktacji rozwiązania 1 metodą.

Uczestnik otrzymuje:

4 punkty - gdy

- poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że chłopcy spotkali się po 64 sekundach od momentu wyruszenia w trasę i pokonali odpowiednio 96 metrów i 128 metrów.
- poda odpowiedź, że chłopcy spotkali się po 64 sekundach od momentu wyruszenia w trasę i pokonali odpowiednio 96 metrów i 128 metrów, ale sprawdzi, że otrzymane liczby spełniają **wszystkie** warunki zadania.

3 punkty - gdy

- rozwiązując równanie $1{,}5 \cdot t + 2 \cdot t = 224$ poprawnie wyznaczy $t = 64$ i wyznaczy poprawnie dystans pokonany **przez jednego** z chłopców i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- rozwiązując równanie $1{,}5 \cdot t + 2 \cdot t = 224$ popełni błędy rachunkowe przy wyznaczaniu t i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie (tj. wyznaczy drogi obu chłopców)

2 punkty - gdy

- ułoży równanie $1{,}5 \cdot t + 2 \cdot t = 224$ i poprawnie wyznaczy $t = 64$ i na tym zakończy lub obie drogi będą wyznaczone z błędem **lub**

- ułoży równanie $1{,}5 \cdot t + 2 \cdot t = 224$ i rozwiązując równanie $1{,}5 \cdot t + 2 \cdot t = 224$ popełni błędy rachunkowe przy wyznaczaniu t i konsekwentnie do popełnionego błędu poprawnie wyznaczy dystans pokonany **tylko przez jednego** z chłopców i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

1 punkt - gdy

- poprawnie ułoży równanie $1{,}5 \cdot t + 2 \cdot t = 224$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, że droga pokonana przez pierwszego z chłopców jest równa $1{,}5 \cdot t$ i droga pokonana przez drugiego z chłopców jest równa $2 \cdot t$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Zasady punktacji rozwiązania 2 i 3 metodą.

Uczestnik otrzymuje:

4 punkty - gdy

- poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że chłopcy spotkali się po 64 sekundach od momentu wyruszenia w trasę i pokonali odpowiednio 96 metrów i 128 metrów.
- poda odpowiedź, że chłopcy spotkali się po 64 sekundach od momentu wyruszenia w trasę i pokonali odpowiednio 96 metrów i 128 metrów, ale sprawdzi, że otrzymane liczby spełniają <u>**wszystkie**</u> warunki zadania.

3 punkty - gdy

- rozwiązując układ równań $\begin{cases} s = 1{,}5 \cdot t \\ 224 - s = 2 \cdot t \end{cases}$ **lub** $\begin{cases} 1{,}5 = \frac{s}{t} \\ 2 = \frac{224-s}{t} \end{cases}$

  poprawnie wyznaczy $t = 64$ i poprawnie wyznaczy $s = 96$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- rozwiązując układ równań $\begin{cases} s = 1{,}5 \cdot t \\ 224 - s = 2 \cdot t \end{cases}$ **lub** $\begin{cases} 1{,}5 = \frac{s}{t} \\ 2 = \frac{224-s}{t} \end{cases}$

  poprawnie wyznaczy $t = 64$ i z błędem s, ale do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie **lub**
- rozwiązując układ równań $\begin{cases} s = 1{,}5 \cdot t \\ 224 - s = 2 \cdot t \end{cases}$ **lub** $\begin{cases} 1{,}5 = \frac{s}{t} \\ 2 = \frac{224-s}{t} \end{cases}$

  poprawnie wyznaczy $s = 96$ i z błędem t, ale do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie **lub**

- rozwiązując układ równań $\begin{cases} x = 1{,}5 \cdot t \\ y = 2 \cdot t \\ 1{,}5 \cdot t + 2 \cdot t = 224 \end{cases}$ **lub** $\begin{cases} x = 1{,}5 \cdot t \\ y = 2 \cdot t \\ x + y = 224 \end{cases}$

  poprawnie wyznaczy dwie z trzech niewiadomych i na tym zakończy lub dalej popełni błędy
- rozwiązując układ równań $\begin{cases} x = 1{,}5 \cdot t \\ y = 2 \cdot t \\ 1{,}5 \cdot t + 2 \cdot t = 224 \end{cases}$ **lub** $\begin{cases} x = 1{,}5 \cdot t \\ y = 2 \cdot t \\ x + y = 224 \end{cases}$

z błędem rachunkowym wyznaczy jedną z niewiadomych i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie.

2 punkty - gdy

- rozwiązując układ równań $\begin{cases} s = 1{,}5 \cdot t \\ 224 - s = 2 \cdot t \end{cases}$ **lub** $\begin{cases} 1{,}5 = \frac{s}{t} \\ 2 = \frac{224-s}{t} \end{cases}$

z błędem wyznaczy obie niewiadome i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie l**ub**

- rozwiązując układ równań $\begin{cases} x = 1{,}5 \cdot t \\ y = 2 \cdot t \\ 1{,}5 \cdot t + 2 \cdot t = 224 \end{cases}$ **lub** $\begin{cases} x = 1{,}5 \cdot t \\ y = 2 \cdot t \\ x + y = 224 \end{cases}$

z błędem rachunkowym wyznaczy dwie z niewiadomych i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie.

1 punkt - gdy poprawnie ułoży układ równań

$\begin{cases} s = 1{,}5 \cdot t \\ 224 - s = 2 \cdot t \end{cases}$ **lub** $\begin{cases} 1{,}5 = \frac{s}{t} \\ 2 = \frac{224-s}{t} \end{cases}$ **lub** $\begin{cases} x = 1{,}5 \cdot t \\ y = 2 \cdot t \\ 1{,}5 \cdot t + 2 \cdot t = 224 \end{cases}$ **lub** $\begin{cases} x = 1{,}5 \cdot t \\ y = 2 \cdot t \\ x + y = 224 \end{cases}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Uwagi!

1. **Jeżeli uczestnik w rozwiązaniu zadania otrzyma $t < 0$ to za rozwiązanie zadania może otrzymać maksymalnie 1 punkt.**
2. **Jeżeli uczestnik w rozwiązaniu zadania otrzyma drogę mniejszą od zera to za rozwiązanie zadania może otrzymać maksymalnie 1 punkt.**
3. **Jeżeli uczestnik stosuje niepoprawny wzór na drogę, prędkość lub czas to za rozwiązanie zadanie otrzymuje 0 punktów.**
4. **Nie odejmujemy punktów jeśli uczestnik zapisując równania w rozwiązaniu zadania pominie jednostki, jedynie w odpowiedzi uczeń musi zapisać poprawną jednostkę czasu i długości.**

Zadanie 22. (3 p.)

Uzasadnij, że istnieje trójkąt o polu równym $24\ cm^2$ i wysokościach równych odpowiednio $4\ cm, 6\ cm\ i\ 8\ cm$. Zapisz obliczenia i uzasadnienie.

Przykładowe rozwiązanie:

$P_\Delta = 24\ cm^2$

wysokości wynoszą: $h_\mathrm{a} = 4\ cm, h_\mathrm{b} = 6\ cm, h_\mathrm{c} = 8\ cm,$

długości boków trójkąta wynoszą:

a, b i c oznaczają długości boków trójkąta, na które są odpowiednio opuszczone wysokości:

h_a, h_b, h_c..

Ze wzoru na pole trójkąta otrzymujemy równania:

$24[cm^2] = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 4\ [cm]$ i $24[cm^2] = \frac{1}{2} \cdot b \cdot 6[cm]$ i $24[cm^2] = \frac{1}{2} \cdot c \cdot 8[cm]$

Zatem $a = 12\ cm\ i\ b = 8\ cm\ i\ c = 6\ cm$.

Zauważmy, że $a > b\ i\ a > c\ i\ a > 0, b > 0, c > 0\ i\ 12\ cm < 8\ cm\ +\ 6cm,$

czyli $12\ cm\ < 14\ cm$, zatem spełniona jest nierówność trójkąta co dowodzi, że trójkąt o polu równym $24\ cm^2$ i wysokościach równych odpowiednio $4\ cm, 6\ cm\ i\ 8\ cm$ istnieje.

Zasady punktacji.

Uczestnik otrzymuje:
3 punkty - gdy poprawnie uzasadni, że istnieje trójkąt o polu równym $24\ cm^2$ i wysokościach równych odpowiednio $4\ cm, 6\ cm\ i\ 8\ cm$.

Uwagi: Aby otrzymać maksymalną liczbę punktów:

1. **Uczestnik nie musi zapisać słownie, że spełniona jest nierówność trójkąta wystarczy, że zapisze odpowiednią nierówność** $12\ cm < 8\ cm\ +\ 6\ cm$.
2. **Uczestnik nie musi zapisać nierówności** 12 cm > 8 cm i 12 cm > 6cm **wystarczy, że zapisze, odpowiednią nierówność** $12\ cm < 8\ cm\ +\ 6\ cm,$
3. **Uczestnik nie musi zapisać, że wyznaczone boki trójkąta są większe od zera.**
4. **Uczestnik może podać długości boków** $a = 12\ cm\ i\ b = 8\ cm\ i\ c = 6\ cm$ **bez zapisywania odpowiednich równań i sprawdzić nierówność trójkąta** $12\ cm < 8\ cm\ +\ 6\ cm,$

2 punkty - gdy:

- poprawnie wyznaczy wszystkie trzy długości boków trójkąta i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- Zapisze **3 poprawne równania:**

$24[cm^2] = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 4[cm]$ **i** $24[cm^2] = \frac{1}{2} \cdot b \cdot 6\ [cm]$ i $24[cm^2] = \frac{1}{2} \cdot c \cdot 8\ [cm]$ i co najmniej jedno z nich rozwiąże poprawnie, a pozostałe błędnie, ale konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie tj. sprawdzi nierówność trójkąta.

1 punkty - gdy:

- poprawnie wyznaczy jedną długość boku trójkąta i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- Zapisze **3 poprawne równania:**
  $24[cm^2] = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 4[cm]$ **i** $24[cm^2] = \frac{1}{2} \cdot b \cdot 6[cm]$ i $24[cm^2] = \frac{1}{2} \cdot c \cdot 8[cm]$ i na tym zakończy lub wszystkie trzy rozwiąże błędnie.

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Uwagi!

- **Jeśli uczestnik rozwiązując zadanie we wzorze na pole trójkąta pominie $\frac{1}{2}$ i otrzyma długości boków odpowiednio równe 6 cm, 4 cm i 3 cm i sprawdzi warunek trójkąta, że $6\ cm < 4\ cm\ + 3\ cm$ to za całe rozwiązanie otrzymuje 1 punkt.**
- **Nie odejmujemy punktów jeśli uczestnik zapisując równania lub nierówności w rozwiązaniu zadania pominie jednostki.**

Zadanie 23. (4 p.)

W pierwszy poniedziałek października na lekcji muzyki w klasie 7 b uczniów nieobecnych było **4 razy mniej** niż obecnych. Wyznacz ilu uczniów uczęszcza do klasy 7 b, jeśli w drugi poniedziałek października liczba uczniów obecnych na lekcji muzyki była **o trzy mniejsza** niż w pierwszy poniedziałek października oraz nieobecni stanowili 40 % obecnych. Zapisz obliczenia.

Przykładowe rozwiązanie:

Metoda I

Z warunków zadania możemy wprowadzić oznaczenia:
n – liczba uczniów klasy 7b nieobecnych na lekcji muzyki w pierwszy poniedziałek października
$4n$ – liczba uczniów klasy 7b obecnych na lekcji muzyki w pierwszy poniedziałek października
$5n$ – liczba uczniów klasy 7b
$(4n - 3)$ – liczba uczniów klasy 7b obecnych na lekcji muzyki w drugi poniedziałek października

$(n+3)$ – liczba uczniów klasy 7b nieobecnych na lekcji muzyki w drugi poniedziałek października

$0{,}4 \cdot (4n-3)$ – liczba uczniów klasy 7b nieobecnych na lekcji muzyki w drugi poniedziałek października

Zatem możemy ułożyć równanie:

$0{,}4 \cdot (4n-3) = n+3$

$1{,}6n - 1{,}2 = n+3$

$1{,}6n - n = 1{,}2 + 3$

$0{,}6n = 4{,}2$

$n = 7$

$5n = 35$

Do klasy 7b uczęszcza 35 uczniów.

Metoda II

Z warunków zadania możemy wprowadzić oznaczenia:
o – liczba uczniów klasy 7b obecnych na lekcji muzyki w pierwszy poniedziałek października
$\frac{o}{4}$ – liczba uczniów klasy 7b nieobecnych na lekcji muzyki w pierwszy poniedziałek października
$(o-3)$ – liczba uczniów klasy 7b obecnych na lekcji muzyki w drugi poniedziałek października
$\left(\frac{o}{4}+3\right)$ –liczba uczniów klasy 7b nieobecnych na lekcji muzyki w drugi poniedziałek października
$0{,}4 \cdot (o-3)$ –liczba uczniów klasy 7b nieobecnych na lekcji muzyki w drugi poniedziałek października

Zatem możemy ułożyć równanie:
$0{,}4 \cdot (o-3) = \frac{o}{4} + 3$
$0{,}4o - 1{,}2 = \frac{o}{4} + 3$
$0{,}4o - \frac{o}{4} = 1{,}2 + 3$
$0{,}4o - 0{,}25o = 4{,}2$
$0{,}15o = 4{,}2$
$15o = 420$

$o = 28$ i $\frac{o}{4} = \frac{28}{4} = 7$, 28 +7=35

Do klasy 7b uczęszcza 35 uczniów.

Metoda III

Z warunków zadania możemy wprowadzić oznaczenia:

1. Niech n i o oznaczają odpowiednio

$n -$ liczba uczniów klasy 7b nieobecnych na lekcji muzyki w pierwszy poniedziałek października
o –liczba uczniów klasy 7b obecnych na lekcji muzyki w pierwszy poniedziałek października
Liczba uczniów nieobecnych w pierwszy poniedziałek października była 4 razy mniejsza niż liczba uczniów obecnych zatem otrzymujemy równanie:

$4n = o$ lub $\frac{o}{4} = n$

2. W drugi poniedziałek października liczba uczniów obecnych była o 3 mniejsza niż w pierwszy poniedziałek października zatem:

$(o - 3)$ –liczba uczniów klasy 7b obecnych na lekcji muzyki w drugi poniedziałek października
$(n + 3)$ –liczba uczniów klasy 7b nieobecnych na lekcji muzyki w drugi poniedziałek października
Liczba uczniów nieobecnych w drugi poniedziałek października stanowiła 40% liczby uczniów obecnych zatem otrzymujemy równanie:

$n + 3 = 0{,}4(o - 3)$.

3. Możemy zapisać układ równań: $\begin{cases} 4n = o \\ n + 3 = 0{,}4(o - 3) \end{cases}$ lub $\begin{cases} \frac{o}{4} = n \\ n + 3 = 0{,}4(o - 3) \end{cases}$

Rozwiązując układ równań otrzymamy $n = 7\ i\ o\ = 28$

Do klasy 7b uczęszcza 35 uczniów.

Zasady punktacji.

Uczestnik otrzymuje:
4 punkty - gdy

- poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że liczba uczniów w klasie wynosi 35 **lub**
- poda odpowiedź, że liczba uczniów w klasie wynosi 35, poda liczbę obecnych w pierwszy października poniedziałek równą 28 i liczbę nieobecnych równą 7 oraz poda liczbę obecnych w drugi poniedziałek października równą 25 i liczbę nieobecnych równą 10, ale sprawdzi, że otrzymane liczby spełniają **wszystkie** warunki zadania.

3 punkty – gdy

- rozwiązując równanie np.: $0{,}4 \cdot (4n-3) = n+3$ poprawnie wyznaczy wartość n=7 i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- rozwiązując równanie np. $0{,}4 \cdot (o-3) = \frac{o}{4} + 3$ poprawnie wyznaczy wartość $o = 28$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- rozwiązując układ równań np.: $\begin{cases} 4n = o \\ n+3 = 0{,}4(o-3) \end{cases}$ lub $\begin{cases} \frac{o}{4} = n \\ n+3 = 0{,}4(o-3) \end{cases}$

  poprawnie wyznaczy $n = 7$ i $o = 28$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- rozwiązując równanie np. $0{,}4 \cdot (4n-3) = n+3$ wyznaczy z błędem rachunkowym wartość n, która jest liczbą naturalną dodatnią i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie **lub**
- rozwiązując równanie np. $0{,}4 \cdot (o-3) = \frac{o}{4} + 3$ wyznaczy z błędem rachunkowym wartość o, która jest liczbą naturalną dodatnią i podzielną przez 4 i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie **lub**
- rozwiązując układ równań np.: $\begin{cases} 4n = o \\ n+3 = 0{,}4(o-3) \end{cases}$ lub $\begin{cases} \frac{o}{4} = n \\ n+3 = 0{,}4(o-3) \end{cases}$

  wyznaczy z błędem rachunkowym n, ale otrzyma liczbę naturalna dodatnią i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie **lub**
- rozwiązując układ równań np.: $\begin{cases} 4n = o \\ n+3 = 0{,}4(o-3) \end{cases}$ lub $\begin{cases} \frac{o}{4} = n \\ n+3 = 0{,}4(o-3) \end{cases}$

  wyznaczy z błędem rachunkowym o , ale otrzyma liczbę naturalna dodatnią podzielną przez 4 i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie.

2 punkty – gdy

- zapisze równanie z jedną niewiadomą np.:

  $0{,}4 \cdot (4n-3) = n+3$ lub $0{,}4 \cdot (o-3) = \frac{o}{4} + 3$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

  lub
- sprowadzi układ równań np.: $\begin{cases} 4n = o \\ n+3 = 0{,}4(o-3) \end{cases}$ lub $\begin{cases} \frac{o}{4} = n \\ n+3 = 0{,}4(o-3) \end{cases}$

do poprawnego równania z jedną niewiadomą np.:
$n+3 = 0{,}4(4n-3)$ lub $\frac{o}{4} + 3 = 0{,}4(o-3)$ lub
$\frac{o}{4} = 0{,}4(o-3) - 3$ lub 4$\cdot$ $[0{,}4(o-3) - 3] = o$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

1 punkt – gdy

- zapisze przynajmniej dwa wyrażenia algebraiczne w zależności od jednej zmiennej np.:

$\left(\frac{o}{4} + 3\right)$ – liczba uczniów klasy 7b nieobecnych na lekcji muzyki w drugi poniedziałek października i $0{,}4 \cdot (o-3)$ – liczba uczniów klasy 7b nieobecnych na lekcji muzyki w drugi poniedziałek października, gdzie o jest liczbą uczniów klasy 7b obecnych na lekcji muzyki w pierwszy poniedziałek października **lub**

$(n+3)$ - liczba uczniów klasy 7b nieobecnych na lekcji muzyki w drugi poniedziałek października i $0{,}4\cdot(4n-3)$ – liczba uczniów klasy 7b nieobecnych na lekcji muzyki w drugi poniedziałek października, gdzie n jest liczbą uczniów klasy 7b nieobecnych na lekcji muzyki w pierwszy poniedziałek października i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**

- zapisze poprawnie układ równań $\begin{cases} 4n = o \\ n+3 = 0{,}4(o-3) \end{cases}$ lub $\begin{cases} \frac{o}{4} = n \\ n+3 = 0{,}4(o-3) \end{cases}$

  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Zadanie 24. (5 p.)

Zewnętrzne wymiary donicy wykonanej z betonu, w kształcie prostopadłościanu wynoszą odpowiednio: wysokość - 1,5 dm, dno $\frac{12}{25}\,m$ x 10 cm. Do pustej donicy można wlać maksymalnie 6 l wody. Oblicz ile maksymalnie doniczek można wykonać mając do dyspozycji 10000 cm^3 betonu? Zapisz obliczenia.

Przykładowe rozwiązanie:

Dane:

1,5 dm, dno $\frac{12}{25}\,m$ x 10 cm – zewnętrzne wymiary donicy w kształcie prostopadłościanu
6 l – maksymalna ilość wody, którą można wlać do donicy
10000 cm^3 – ilość betonu

Wyznaczmy objętość prostopadłościanu ze wzoru $V = a\cdot b\cdot c$

$$V = 1{,}5\,[dm]\cdot\frac{12}{25}[m]\cdot 10[cm] = 15\,[cm]\cdot 48[cm]\cdot 10[cm] = 7200\,[cm^3] = 7{,}2\,[dm^3] = 0{,}0072\,[m^3] = 7{,}2\,l$$

$V_{wody} = 6l = 6000\,[cm^3] = 6\,[dm^3] = 0{,}006\,[m^3]$

$7200\,[cm^3] - 6000\,[cm^3] = 1200\,[cm^3] = 1{,}2\,[dm^3] = 0{,}0012\,[m^3] = 1{,}2\,l$ – ilość betonu potrzebna do wykonania jednej doniczki

$10000\,[cm^3] : 1200\,[cm^3] = 8\frac{1}{3}$

Zatem dysponując 10000 $[cm^3]$ betonu można wykonać maksymalnie 8 doniczek, o których mowa w zadaniu.

Zasady punktacji.

Uczestnik otrzymuje:
5 punktów – gdy

- poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że maksymalna liczba doniczek, o których mowa w zadaniu wynosi 8.

4 punkty - gdy

- wyznaczając liczbę doniczek wynik poda w postaci ułamka np. $8\frac{1}{3}$ lub $\frac{10000}{1200}$ lub $\frac{10}{1,2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- popełni błąd rachunkowy w wyznaczaniu ilorazu $\frac{10000}{1200}$, ale poprawnie wyznaczy część całkowitą z otrzymanego wyniku **lub**
- zastosuje poprawną metodę wyznaczania objętości prostopadłościanu, ale popełni błąd rachunkowy np. w wyznaczaniu iloczynu $15\ [cm] \cdot 48[cm] \cdot 10[cm]$ i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie **lub**
- popełni błąd rachunkowy w wyznaczaniu różnicy np.:
  $7200\ [cm^3] - 6000\ [cm^3]\ lub\ 7{,}2\ [dm^3]\ -\ 6\ [dm^3]\ lub\ 7{,}2\ l -\ 6\ l$ i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie.

3 punkty - gdy

- poprawnie wyliczy ilość betonu potrzebną do produkcji jednej doniczki równą np.:
  $1200\ [cm^3] = 1{,}2\ [dm^3]\ = 0{,}0012\ [m^3] = 1{,}2\ l$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

2 punkty - gdy

- poprawnie wyliczy objętość doniczki o zewnętrznych wymiarach 1,5 dm x $\frac{12}{25}\ m$ x 10 cm i zapisze, objętość doniczki i objętość wody w tych samych jednostkach np.:
  $V = 7200\ [cm^3]\ i\ V_{wody} = 6000\ [cm^3]$ **lub** $V = 7{,}2\ [dm^3]\ i\ V_{wody} = 6\ [dm^3]$ **lub**
  $V = 7{,}2\ l\ i\ V_{wody} = 6\ l$ **lub** $V = 0{,}0072\ [m^3]\ i\ V_{wody} = 0{,}006\ [m^3]$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

1 punkt - gdy

- poprawnie wyliczy objętość doniczki o zewnętrznych wymiarach: 1,5 [dm] x $\frac{12}{25}[m]$ x 10 [cm] i zapisze objętość doniczki równą np.:
  $V = 7200\ [cm^3]$ lub $V = 7{,}2\ [dm^3]$ lub $V = 7{,}2\ [l]$ lub $V = 0{,}0072\ [m^3]$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie zamieni objętość wody wyrażoną w litrach i zapisze np.:
  $V_{wody} = 6000\ [cm^3]\ lub\ V_{wody} = 6\ [dm^3]$ lub $V = 0{,}0072\ [m^3]$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Uwaga!
Nie odejmujemy punktów jeśli uczestnik zapisując równania w rozwiązaniu zadania pominie jednostki, jednostki powinny być zapisane jedynie w odpowiedziach np. jak podaje objętość.

Wojewódzki Konkurs Matematyczny
dla uczniów szkół podstawowych województwa wielkopolskiego
STOPIEŃ REJONOWY 2021/2022

„Matematyka – uniwersalny klucz do przyszłości"

Klucz punktowania zadań zamkniętych i zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Za rozwiązanie całego testu uczestnik może otrzymać maksymalnie 40 punktów.

Do stopnia wojewódzkiego zakwalifikują się uczestnicy, którzy zdobędą **co najmniej 85% punktów, czyli 34 punkty.**

1. Klucz punktowania zadań zamkniętych.

Za każdą poprawną odpowiedź uczeń otrzymuje 1 punkt.

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Poprawna odpowiedź	C	B	A	B	A	B	C	D	B	D	C	A	A	C	B	B

2. Przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych.

Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania nieuwzględnione w schemacie punktowania przyznajemy maksymalną liczbę punktów należnych za to zadanie.

Uwaga: Nie jest wymagana od uczestnika na końcu zadania wyraźnie sformułowana odpowiedź słowna wystarczy, że uczestnik wyznaczy, obliczy szukaną wartość, bądź przeprowadzi argumentację w zadaniu na dowodzenie.

Zadanie 17. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: **3**

Pan Jerzy przeznaczył pewną kwotę na kieszonkowe dla swoich trzech córek. Najstarsza – Anna dostała 45% kwoty, średnia – Ola otrzymała $\frac{3}{5}$ pozostałej kwoty, a najmłodsza – Kasia otrzymała resztę kwoty czyli 55 zł.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

Tata przeznaczył na kieszonkowe kwotę, która jest podzielna przez 3.	P	F
Ola dostała kieszonkowego więcej niż 90 zł.	P	F
Kieszonkowe Oli jest o jest o 50% większe od kieszonkowego Kasi.	P	F

Za każdą poprawną odpowiedź uczeń otrzymuje jeden punkt. Uczeń w tym zadaniu nie musi przedstawiać rozwiązania. Punktujemy jedynie zaznaczone odpowiedzi w tabeli.

Zasady oceniania – Uczestnik otrzymuje:

3 punkty – gdy wszystkie odpowiedzi są poprawne,

2 punkty – gdy dwie odpowiedzi są poprawne,

1 punkt – gdy jedna odpowiedź jest poprawna,

0 punktów – gdy wszystkie odpowiedzi są błędne.

Zadanie 18.	Maksymalna liczba punktów do uzyskania: **3**

Przekątne trapezu równoramiennego są prostopadłe, a wysokość tego trapezu jest równa 5 cm.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

Istnieje więcej niż jeden trapez o takich własnościach.	P	F
Suma długości podstaw tego trapezu jest równa 20 cm.	P	F
Pole tego trapezu jest równe 25 cm^2.	P	F

Za każdą poprawną odpowiedź uczeń otrzymuje jeden punkt. Uczeń w tym zadaniu nie musi przedstawiać rozwiązania. Punktujemy jedynie zaznaczone odpowiedzi w tabeli.

Zasady oceniania – Uczestnik otrzymuje:

3 punkty – gdy wszystkie odpowiedzi są poprawne,

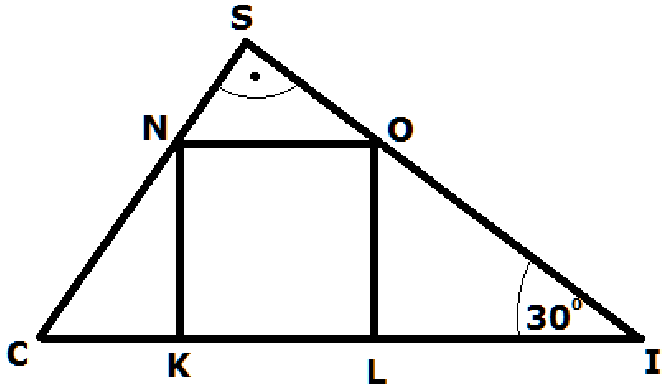
2 punkty – gdy dwie odpowiedzi są poprawne,

1 punkt – gdy jedna odpowiedź jest poprawna,

0 punktów – gdy wszystkie odpowiedzi są błędne.

Zadanie 19.	Maksymalna liczba punktów do uzyskania: **3**

W trójkąt prostokątny CIS (zamieszczonym na rysunku poniżej) wpisano kwadrat KLON, którego pole jest równe 36 cm^2.



Oceń prawdziwość podanych zdań.

Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

Pole trójkąta CKN jest równe $18\sqrt{3}\,cm^2$.	P	F
Obwód trójkąta CIS jest równy $\left(21 + 15\sqrt{3}\right)$ cm.	P	F
Pole trójkąta ILO jest trzy razy większe od pola trójkąta CKN.	P	F

Zasady oceniania – Uczestnik otrzymuje:

3 punkty – gdy wszystkie odpowiedzi są poprawne,

2 punkty – gdy dwie odpowiedzi są poprawne,

1 punkt – gdy jedna odpowiedź jest poprawna,

0 punktów – gdy wszystkie odpowiedzi są błędne.

Zadanie 20.	Maksymalna liczba punktów do uzyskania: **3**

Wymiary prostopadłościanu są kolejnymi liczbami naturalnymi podzielnymi przez 3. Suma długości wszystkich jego krawędzi jest równa 108 cm. Oblicz objętość tego prostopadłościanu. Zapisz wszystkie obliczenia.

Przykładowe rozwiązania:

Metoda I

Dany jest prostopadłościan o wymiarach $x, x+3, x+6$, gdzie x jest liczbą naturalną dodatnią podzielną przez 3.

108 cm – suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu

$4x + 4(x+3) + 4(x+6)$ – suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu

Zatem:

$$4x + 4(x+3) + 4(x+6) = 108$$

$$3x + 9 = 27$$

$$3x = 18$$

$$x = 6$$

Prostopadłościan ma wymiary 6 cm x 9 cm x 12 cm

$V = 6\ cm \cdot 9\ cm \cdot 12\ cm = 648\ cm^3$

Objętość prostopadłościanu jest równa $648\ cm^3$.

Metoda II

Dany jest prostopadłościan o wymiarach 3x, 3x+3, 3x+6, gdzie x jest liczbą naturalną dodatnią.

108 cm – suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu.

$4 \cdot 3x + 4 \cdot (3x+3) + 4 \cdot (3x+6)$ – suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu

Zatem:

$$4 \cdot 3x + 4 \cdot (3x+3) + 4 \cdot (3x+6) = 108$$

$$3x + 3x + 3 + 3x + 6 = 27$$

$$9x + 9 = 27$$

$$9x = 18$$

$$x = 2$$

Zatem $3x = 6\ cm$

Prostopadłościan ma wymiary 6 cm x 9 cm x 12 cm

$V = 6\ cm \cdot 9\ cm \cdot 12\ cm = 648\ cm^3$

Objętość prostopadłościanu jest równa $648\ cm^3$.

Zasady oceniania – Uczestnik otrzymuje:

3 punkty – gdy:

- poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że objętość prostopadłościanu jest równa $648\ cm^3$ **lub**
- poda odpowiedź, że objętość prostopadłościanu jest równa $648\ cm^3$ i poda, że prostopadłościan ma wymiary 6 cm x 9 cm x 12 cm i sprawdzi, że podane wymiary prostopadłościanu **<u>spełniają wszystkie</u>** warunki zadania.

2 punkty – gdy:

- poprawnie wyznaczy (obliczy) wymiary prostopadłościanu 6 cm x 9 cm x 12 cm i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poda, że prostopadłościan ma wymiary 6 cm x 9 cm x 12 cm i sprawdzi, że podane wymiary prostopadłościanu **<u>spełniają wszystkie</u>** warunki zadania i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie rozwiąże równanie np.: $4x + 4(x+3) + 4(x+6) = 108$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie rozwiąże równanie np.: $4 \cdot 3x + 4 \cdot (3x+3) + 4 \cdot (3x+6) = 108$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- rozwiązując równanie np.: $4x + 4(x+3) + 4(x+6) = 108$, wyznaczy z błędem rachunkowym wartość x, która jest liczbą naturalną dodatnią podzielną przez trzy i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie **lub**
- rozwiązując równanie np.: $4 \cdot 3x + 4 \cdot (3x+3) + 4 \cdot (3x+6) = 108$ wyznaczy z błędem rachunkowym wartość x, która jest liczbą naturalną dodatnią i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie **lub**
- poda odpowiedź, że objętość prostopadłościanu jest równa $648\ cm^3$ i poda, że prostopadłościan ma wymiary 6cm x 9cm x 12 cm, ale **<u>nie sprawdzi</u>**, że podane wymiary prostopadłościanu **<u>spełniają wszystkie</u>** warunki zadania.

1 punkty – gdy:

- rozwiązując równanie np.: $4x + 4(x+3) + 4(x+6) = 108$, wyznaczy z błędem rachunkowym x i otrzyma wynik, który nie jest liczbą naturalną dodatnią podzielną przez 3 **lub**
- rozwiązując równanie np.: $4 \cdot 3x + 4 \cdot (3x+3) + 4 \cdot (3x+6) = 108$ wyznaczy z błędem rachunkowym x i otrzyma wynik, który nie jest liczbą naturalną dodatnią **lub**
- zapisze równanie z jedną niewiadomą np.:
  $4x + 4(x+3) + 4(x+6) = 108$, *lub* $4 \cdot 3x + 4 \cdot (3x+3) + 4 \cdot (3x+6) = 108$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poda tylko odpowiedź, że objętość prostopadłościanu jest równa $648\ cm^3$.

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Uwagi:

1. **Nie odejmujemy punktów jeśli uczestnik zapisując równania w rozwiązaniu zadania pominie zapisanie, założeń np., że x jest liczbą naturalną dodatnią lub naturalna dodatnią podzielną przez 3.**
2. **Jeśli uczestnik zapisując objętość prostopadłościanu zapisze $V = 648$, (pominie jednostki) to maksymalnie za zadanie może otrzymać 2 punkty.**

Zadanie 21.	Maksymalna liczba punktów do uzyskania: **2**

Udowodnij, że jeżeli od dowolnej liczby dwucyfrowej dodatniej odejmiemy sumę jej cyfr, to otrzymana różnica jest wielokrotnością liczby 9. Zapisz wszystkie obliczenia.

Przykładowe rozwiązanie:

Niech n będzie dowolną liczbą dwucyfrową dodatnią,

Przez x oznaczmy cyfrę dziesiątek liczby n, a przez y cyfrę jedności liczby n, zatem dowolną liczbę dwucyfrową dodatnią n możemy zapisać w postaci:

$n = 10x + y$, gdzie x jest dowolną liczbą ze zbioru {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, a y jest dowolną liczbą ze zbioru {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Różnica $n\ i\ (x+y)$ jest równa:

$n - (x+y) = (10x+y) - (x+y) = 10x + y - x - y = 9x$, czyli otrzymana różnica jest wielokrotnością liczby 9, ponieważ jest iloczynem liczby 9 i pewnej liczby x, która jest liczbą całkowitą. Co kończy dowód.

Zasady oceniania – Uczestnik otrzymuje:

2 punkty – gdy:

- gdy poprawnie uzasadni, że różnica jest wielokrotnością liczby 9 **lub**
- gdy obliczy **wszystkie** różnice dla **90 liczb całkowitych dodatnich** i pokaże, że otrzymane różnice są zawsze wielokrotnością 9.

Uwaga: Uczeń w rozumowaniu może tylko zapisać, np., że x jest cyfrą dziesiątek a y cyfrą jedności, nie musi podawać zbiorów do których należą x i y.

1 punkt – gdy:

- gdy zapisze różnicę dowolnej liczby dwucyfrowej i sumy jej cyfr np. w postaci: $10x + y - (x + y)$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- gdy zapisze różnicę dowolnej liczby dwucyfrowej i sumy jej cyfr **z błędem** np. w postaci:
$$10x + y - x + y$$
- gdy zapisze symboliczne dowolną liczbę dwucyfrową dodatnią np. w postaci $10x + y$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

0 punktów – gdy:

- rozwiązanie błędne, brak rozwiązania, bądź dowód na konkretnym przykładzie.

Uwagi:

- **W rozwiązaniu zadania uczestnik może pominąć zapis do jakiego zbioru należy cyfra dziesiątek, a do jakiego zbioru należy cyfra jedności dowolnej liczby dwucyfrowej, ale powinien zapisać, że są to cyfry.**
- **Jeśli uczestnik zapisze dowolną liczbę dwucyfrową dodatnią w postaci np. 10x + y i nie poda żadnych warunków dotyczących zmiennej x i y to uczestnik za zadanie może otrzymać maksymalnie 1 p.**

Zadanie 22.	Maksymalna liczba punktów do uzyskania: **3**

W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest o 1 cm krótsza od przeciwprostokątnej, a druga przyprostokątna ma długość równą 5 cm. Oblicz długość przeciwprostokątnej i pole tego trójkąta. Zapisz wszystkie obliczenia.

Przykładowe rozwiązania:

Metoda I

Przez x oznaczmy długość przeciwprostokątnej trójkąta.

Zatem:

$(x-1\ )\ cm$ – długość jednej z przyprostokątnych trójkąta, gdzie $x>1$

5 cm - długość drugiej z przyprostokątnych trójkąta

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa możemy ułożyć równanie,

$$5^2+(x-1)^2=x^2$$

$$25+x^2-2x+1=x^2$$

$$13=x$$

$$P=\frac{12\ cm\cdot 5\ cm}{2}=30\ cm^2$$

Przeciwprostokątna tego trójkąta jest równa 13 cm, a pole tego trójkąta wynosi $30\ cm^2$.

Metoda II

Przez x oznaczmy długość jednej z przyprostokątnych trójkąta, gdzie $x>0$

Zatem:

$(x+1\ )\ cm$ – długość przeciwprostokątnej trójkąta,

5 cm - długość drugiej z przyprostokątnych trójkąta

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa możemy ułożyć równanie,

$$5^2+x^2=(x+1)^2$$

$$25+x^2=x^2+2x+1$$

$$12=x$$

$P = \frac{12\ cm \cdot 5\ cm}{2} = 30\ cm^2$ i $x + 1 = 13\ cm$

Przeciwprostokątna tego trójkąta jest równa 13 cm, a pole tego trójkąta wynosi $30\ cm^2$.

Zasady oceniania rozwiązania 1 metodą:

Uczestnik otrzymuje:

3 punkty – gdy:

- poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że przeciwprostokątna tego trójkąta jest równa 13 cm, a pole tego trójkąta wynosi $30\ cm^2$ **lub**
- poda odpowiedź, że przeciwprostokątna tego trójkąta jest równa 13 cm i pole tego trójkąta wynosi $30\ cm^2$. ale sprawdzi, że otrzymane długości boków spełniają wszystkie warunki zadania i Twierdzenie Pitagorasa.

2 punkty – gdy:

- rozwiązując równanie $5^2 + (x-1)^2 = x^2$ poprawnie wyznaczy długość przeciwprostokątnej i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- rozwiązując równanie postaci: $25 + x^2 - 2x + 1 = x^2$ popełni błędy rachunkowe przy wyznaczaniu x, ale otrzyma $x > 1$ i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie **lub**
- poda odpowiedź, że przeciwprostokątna tego trójkąta jest równa 13 cm i nie poda ile wynosi pole trójkąta, ale sprawdzi, że otrzymane długości boków spełniają wszystkie warunki zadania i Twierdzenie Pitagorasa.

1 punkt – gdy:

- poprawnie ułoży równanie $5^2 + (x-1)^2 = x^2$ na tym zakończy lub dalej popełni błędy (np. otrzyma x < 1 lub niepoprawnie wyznaczy wartość wyrażenia $(x-1)^2$ **lub**
- poda odpowiedź, że przeciwprostokątna tego trójkąta jest równa 13 cm i pole tego trójkąta wynosi $30\ cm^2$, ale **nie sprawdzi**, że otrzymane długości boków spełniają wszystkie warunki zadania i Twierdzenie Pitagorasa.

0 punktów – gdy:

- rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Zasady oceniania rozwiązania 2 metodą:

Uczestnik otrzymuje:

3 punkty – gdy:

- poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że przeciwprostokątna tego trójkąta jest równa 13 cm, a pole tego trójkąta wynosi 30 cm^2 **lub**
- poda odpowiedź, że przeciwprostokątna tego trójkąta jest równa 13 cm i pole tego trójkąta wynosi 30 cm^2. ale sprawdzi, że otrzymane długości boków spełniają wszystkie warunki zadania i Twierdzenie Pitagorasa.

2 punkty – gdy:

- rozwiązując równanie $5^2 + x^2 = (x+1)^2$ poprawnie wyznaczy długość drugiej przyprostokątnej $x = 12\ cm$ i obliczy Pole trójkąta równe 30 cm^2 **lub**
- rozwiązując równanie postaci: $25 + x^2 = x^2$ + 2x + 1 popełni błędy rachunkowe przy wyznaczaniu x, ale otrzyma $x > 0$ i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie **lub**
- poda odpowiedź, że przeciwprostokątna tego trójkąta jest równa 13 cm i nie poda ile wynosi pole trójkąta, ale sprawdzi, że otrzymane długości boków spełniają wszystkie warunki zadania i Twierdzenie Pitagorasa.

1 punkt – gdy:

- poprawnie ułoży równanie $5^2 + x^2 = (x+1)^2$ na tym zakończy lub dalej popełni błędy (np. otrzyma x < 0 lub niepoprawnie wyznaczy wartość wyrażenia $(x+1)^2$ **lub**
- poda odpowiedź, że przeciwprostokątna tego trójkąta jest równa 13 cm i pole tego trójkąta wynosi 30 cm^2, ale **nie sprawdzi**, że otrzymane długości boków spełniają wszystkie warunki zadania i Twierdzenie Pitagorasa.

0 punktów – gdy:

- rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Zadanie 23. Maksymalna liczba punktów do uzyskania: **3**

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} \frac{x-2y}{3} - \frac{4-2x}{6} = 3 \\ \frac{2+x}{3} - 2y = 5 \end{cases}$.

Zapisz wszystkie obliczenia.

Przykładowe rozwiązanie:

$$\begin{cases} \frac{x-2y}{3} - \frac{4-2x}{6} = 3 \ (pomnóżmy\ równanie\ obustronnie\ przez\ 6) \\ \frac{2+x}{3} - 2y = 5 \ (pomnóżmy\ równanie\ obustronnie\ przez\ 3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x-2y) - (4-2x) = 18 \\ 2 + x - 6y = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 4y - 4 + 2x = 18 \\ x - 6y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 4y = 22 \\ x - 6y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = 11 \\ x - 6y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = 11 \\ x = 6y + 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(6y + 13) - 2y = 11 \\ x = 6y + 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12y + 26 - 2y = 11 \\ x = 6y + 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10y = -15 \\ x = 6y + 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1{,}5 \\ x = 6y + 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1{,}5 \\ x = 6 \cdot (-1{,}5) + 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1{,}5 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -1{,}5 \end{cases}$$

Zasady oceniania – Uczestnik otrzymuje:

3 punkty – gdy:

- poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że rozwiązaniem układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = 4 \\ y = -1{,}5 \end{cases}$ **lub**
- poda odpowiedź, że rozwiązaniem układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = 4 \\ y = -1{,}5 \end{cases}$, ale sprawdzi wykonując obliczenia, że para liczb $\begin{cases} x = 4 \\ y = -1{,}5 \end{cases}$ spełnia oba równania układu równań $\begin{cases} \frac{x-2y}{3} - \frac{4-2x}{6} = 3 \\ \frac{2+x}{3} - 2y = 5 \end{cases}$.

2 punkty – gdy:

- rozwiązując układ równań $\begin{cases} \frac{x-2y}{3} - \frac{4-2x}{6} = 3 \\ \frac{2+x}{3} - 2y = 5 \end{cases}$ poprawnie wyznaczy wartość $x = 4$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- rozwiązując układ równań $\begin{cases} \frac{x-2y}{3} - \frac{4-2x}{6} = 3 \\ \frac{2+x}{3} - 2y = 5 \end{cases}$ poprawnie wyznaczy wartość $y = -1{,}5$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- doprowadzi układ równań do poprawnego równania linowego z jedną niewiadomą x i wyznaczy z błędem rachunkowym x, ale konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie **lub**
- doprowadzi układ równań do poprawnego równania linowego z jedną niewiadomą y i wyznaczy z błędem rachunkowym y, ale konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie.

1 punkt – gdy:

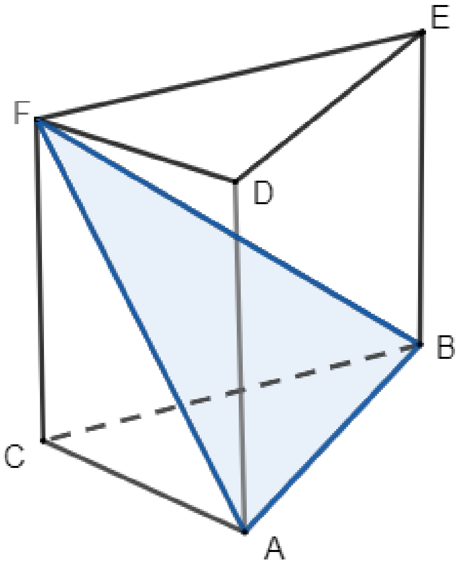
- doprowadzi układ równań do poprawnego równania linowego z jedną niewiadomą x i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- doprowadzi układ równań do poprawnego równania linowego z jedną niewiadomą x i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poda odpowiedź, że rozwiązaniem układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = 4 \\ y = -1{,}5 \end{cases}$, ale **nie wykona sprawdzenia**.

0 punktów – gdy:

- rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Zadanie 24.	Maksymalna liczba punktów do uzyskania: **4**

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny ABCDEF o podstawach ABC i DEF i krawędziach bocznych AD, BE i CF (zobacz rysunek). Długość krawędzi podstawy AB jest równa 6, a pole trójkąta ABF jest równe 54. Oblicz objętość tego graniastosłupa. Zapisz wszystkie obliczenia.



Przykładowe rozwiązania:

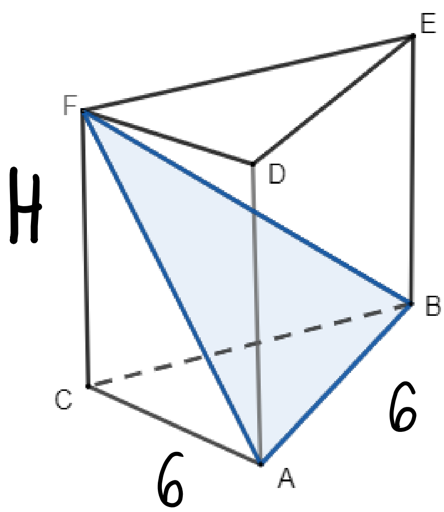
Metoda I

Dane:

$AB = BC = CA = 6$ i $P_{\Delta ABF} = 54$,

Przez H oznaczmy długość krawędzi bocznej graniastosłupa, $H > 0$

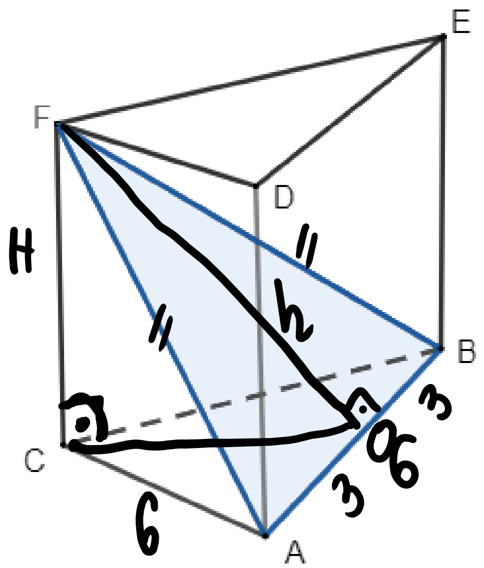
Szukane: V =?



V=$P_p \cdot H$, gdzie pole podstawy jest równe $P_p = P_{\Delta ABC} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$,

Zatem V=$9\sqrt{3} \cdot H$,

Zauważmy, że w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym ściany boczne są prostokątami przystającymi, czyli przekątne AF i BF są równej długości. Zatem trójkąt ABF jest równoramienny o podstawie AB.



Oznaczmy przez h wysokość trójkąta ABF. Zatem $P_{\Delta ABF} = 54$ i $P_{\Delta ABF} = \frac{6h}{2} = 3h$

$$3h = 54$$

$$h = 18$$

Zauważmy, że trójkąt COF jest prostokątny o przyprostokątnych równych odpowiednio: H i $\frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ i przeciwprostokątnej równej 18. Z twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać równanie:

$$H^2 + (3\sqrt{3})^2 = 18^2$$

$$H^2 + 27 = 324$$

$$H^2 = 297$$

$$H = \sqrt{297}$$

$$H = 3\sqrt{33}$$

V=$9\sqrt{3} \cdot H = 9\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{33} = 27\sqrt{99} = 27 \cdot 3\sqrt{11} = 81\sqrt{11}$

Objętość graniastosłupa jest równa $81\sqrt{11}$.

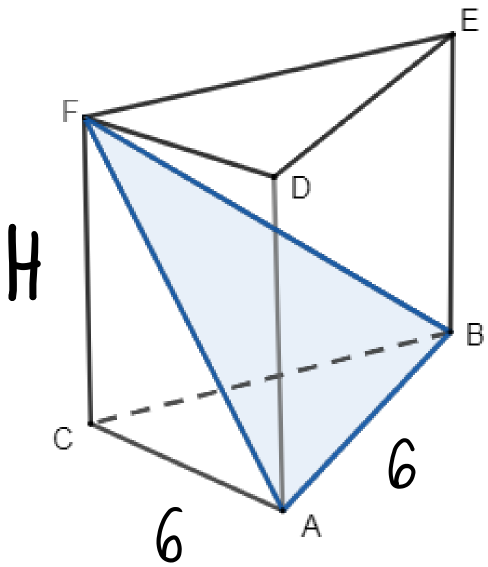
Metoda II

Dane:

$AB = BC = CA = 6$ i $P_{\Delta ABF} = 54$,

Przez H oznaczmy długość krawędzi bocznej graniastosłupa, $H > 0$

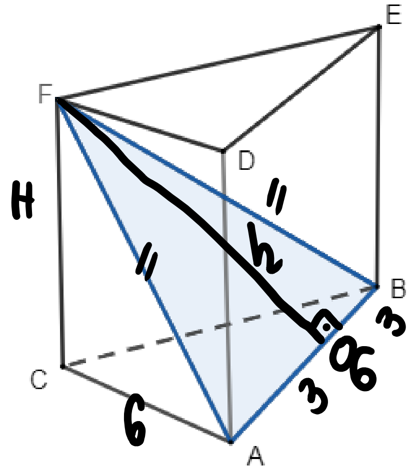
Szukane: V =?



V=$P_p \cdot H$, gdzie pole podstawy jest równe $P_p = P_{\Delta ABC} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$,

Zatem V= $9\sqrt{3} \cdot H$,

Zauważmy, że w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym ściany boczne są prostokątami przystającymi, czyli przekątne AF i BF są równej długości. Zatem trójkąt ABF jest równoramienny o podstawie AB.



Oznaczmy przez h wysokość trójkąta ABF. Zatem $P_{\Delta ABF} = 54$ i $P_{\Delta ABF} = \frac{6h}{2} = 3h$.

$$3h = 54$$

$$h = 18$$

Trójkąt ABF jest równoramienny, a trójkąt AOF prostokątny z twierdzenia Pitagorasa obliczymy ramię trójkąta ABF.

$$3^2 + 18^2 = |AF|^2$$

$$333 = |AF|^2$$

$$|AF| = \sqrt{333}$$

Odcinek AF jest przekątną ściany bocznej, zatem z twierdzenia Pitagorasa obliczymy wysokość graniastosłupa.

$$H^2 + (6)^2 = \sqrt{333}^2$$

$$H^2 + 36 = 333$$

$$H^2 = 297$$

$$H = \sqrt{297}$$

$$H = 3\sqrt{33}$$

V=$9\sqrt{3} \cdot H = 9\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{33} = 27\sqrt{99} = 27 \cdot 3\sqrt{11} = 81\sqrt{11}$.
Objętość graniastosłupa jest równa $81\sqrt{11}$.

Zasady oceniania – Uczestnik otrzymuje:

4 punkty – gdy:

- poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że objętość graniastosłupa jest równa $81\sqrt{11}$ lub $27\sqrt{99}$ lub $9\sqrt{891}$ lub $\sqrt{72171}$.

3 punkty – gdy:

- poprawnie wyznaczy wysokość graniastosłupa $H = \sqrt{297}$ lub $H = 3\sqrt{33}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- ułoży poprawne równanie z niewiadomą H np.:
  $H^2 + (3\sqrt{3})^2 = 18^2$ *lub* $H^2 + (6)^2 = \sqrt{333}^2$ i wyznaczy z błędem rachunkowym dodatnie H i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie **lub**
- z błędem rachunkowym wyznaczy wysokość h trójkąta ABF i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie **lub**
- z błędem rachunkowym wyznaczy długość przekątnej ściany bocznej i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie.

2 punkty – gdy:

- gdy ułoży poprawne równanie z niewiadomą H np.:
  $H^2 + (3\sqrt{3})^2 = 18^2$ *lub* $H^2 + (6)^2 = \sqrt{333}^2$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy wysokość h =18 trójkąta ABF i pole podstawy ABC równe $9\sqrt{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- ułoży poprawne równanie $H^2 + (3\sqrt{3})^2 = h^2$ obliczy z błędem rachunkowym h i z błędem rachunkowym H, ale konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie **lub**
- poprawnie wyznaczy długość przekątnej ściany bocznej równą $\sqrt{333}$ i pole podstawy ABC równe $9\sqrt{3}$.

1 punkt – gdy:

- poprawnie pole podstawy ABC równe $9\sqrt{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy wysokość h =18 trójkąta ABF i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poprawnie wyznaczy długość przekątnej ściany bocznej równą $\sqrt{333}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

0 punktów – gdy:

- rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

ZASADY/KRYTERIA OCENIANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH I OTWARTYCH

Za rozwiązanie całego testu uczestnik może otrzymać maksymalnie 40 punktów. Laureatami konkursu zostaną uczestnicy, którzy zdobędą co najmniej 90% punktów, czyli 36 punktów.

1. Klucz punktowania zadań zamkniętych.

Za każdą poprawną odpowiedź uczeń otrzymuje 1 punkt.

Numer zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
Poprawna odpowiedź	C.	D.	D.	D.	A.	B.	B.	B.	B.	C.	D.	C.	C.	B.	C.

2. Przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych.

Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania nieuwzględnione w schemacie punktowania przyznajemy maksymalną liczbę punktów należnych za to zadanie.

UWAGA: Nie jest wymagana od uczestnika na końcu zadania wyraźnie sformułowana odpowiedź słowna wystarczy, że uczestnik wyznaczy, obliczy szukaną wartość, bądź przeprowadzi argumentację w zadaniu na dowodzenie.

Zadanie 16. Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDS$, jest kwadrat $ABCD$. Wszystkie krawędzie ostrosłupa $ABCDS$ mają długość 6 cm.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

Najkrótsza wysokość trójkąta ASC wynosi 6 cm.	P	F
Trójkąt ASC jest ostrokątny.	P	F
Objętość ostrosłupa $ABCDS$ jest równa $36\sqrt{2}\ cm^3$.	P	F

Za każdą poprawną odpowiedź uczestnik otrzymuje jeden punkt. Uczeń w tym zadaniu nie musi przedstawiać rozwiązania. Punktujemy jedynie zaznaczone odpowiedzi w tabeli.

Zasady oceniania: Uczeń otrzymuje:

3 punkty – gdy wszystkie odpowiedzi są poprawne,
2 punkty – gdy dwie odpowiedzi są poprawne,
1 punkt – gdy jedna odpowiedź jest poprawna,
0 punktów – gdy wszystkie odpowiedzi są błędne.

Zadanie 17.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Dana jest liczba $k = 3^{n+2} - 3^n + 4^{n+2} - 4^n$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną dodatnią.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

Liczba k jest wielokrotnością liczby 7.	P	F
Liczba k jest parzysta.	P	F
Liczba k jest podzielna przez 12.	P	F

Za każdą poprawną odpowiedź uczeń otrzymuje jeden punkt. Uczeń w tym zadaniu nie musi przedstawiać rozwiązania. Punktujemy jedynie zaznaczone odpowiedzi w tabeli.

Zasady oceniania: Uczeń otrzymuje:

3 punkty – gdy wszystkie odpowiedzi są poprawne,
2 punkty – gdy dwie odpowiedzi są poprawne,
1 punkt – gdy jedna odpowiedź jest poprawna,
0 punktów – gdy wszystkie odpowiedzi są błędne.

Zadanie 18.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Dana jest nierówność $8 - 3x > \frac{6-x}{2}$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

Najmniejszą liczbą naturalną niespełniającą tej nierówności jest liczba 2.	P	F
Do zbioru rozwiązań nierówności należy nieskończenie wiele liczb dodatnich.	P	F
Dwie liczby pierwsze spełniają tę nierówność.	P	F

Za każdą poprawną odpowiedź uczeń otrzymuje jeden punkt. Uczeń w tym zadaniu nie musi przedstawiać rozwiązania. Punktujemy jedynie zaznaczone odpowiedzi w tabeli.

Zasady oceniania: Uczeń otrzymuje:

3 punkty – gdy wszystkie odpowiedzi są poprawne,
2 punkty – gdy dwie odpowiedzi są poprawne,
1 punkt – gdy jedna odpowiedź jest poprawna,
0 punktów – gdy wszystkie odpowiedzi są błędne.

Zadanie 19.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **4**

Tomek za dwa lata będzie dwa razy starszy niż był dwa lata temu, a Krzysztof za trzy lata będzie cztery razy starszy niż przed trzema laty.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

Tomek jest o 2 lata starszy od Krzysztofa.	P	F
Za 10 lat razem będą mieli 31 lat.	P	F
Tomek i Krzysztof są w tym samym wieku.	P	F
Cztery lata temu Tomek miał dwa razy więcej lat niż Krzysztof.	P	F

Zasady oceniania: Uczeń otrzymuje:

4 punkty – gdy wszystkie odpowiedzi są poprawne,
3 punkty – gdy trzy odpowiedzi są poprawne,
2 punkty – gdy dwie odpowiedzi są poprawne,
1 punkt – gdy jedna odpowiedź jest poprawna,
0 punktów – gdy wszystkie odpowiedzi są błędne.

Zadanie 20.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **2**

Paweł i jego brat Arek postanowili kupić piłkę do koszykówki. Paweł przekazał na ten cel kwotę równą 40% ceny piłki i jeszcze 20 zł, a Arek – kwotę równą 20% jej ceny i jeszcze 40 zł. Tata dołożył brakujące 60 zł. Ile kosztowała piłka. Zapisz obliczenia i podaj odpowiedź.

Przykładowe rozwiązania:

Metoda I

$x\ zł -\ cena\ piłki\ w\ złotówkach$

$0{,}4x + 20\ zł - kwota, którą\ przekazał\ Paweł$

$0{,}2x + 40\ zł - kwota, którą\ przekał\ Arek$

$60\ zł - kwota, którą\ dołożył\ tata\ na\ piłkę,$

$0{,}4x + 20 + 0{,}2x + 40 + 60 - cena\ piłki\ w\ złotówkach$

Zatem:

$0{,}4x + 20 + 0{,}2x + 40 + 60 = x$

$120 = 0{,}4x$

$x = 300\ zł$

Piłka, którą postanowili kupić chłopcy kosztowała 300 zł.

Metoda II

40% ceny piłki to 120 zł

10% ceny piłki to 30 zł

100% ceny piłki to 300 zł

Piłka, którą postanowili kupić chłopcy kosztowała 300 zł.

Uczestnik otrzymuje:

2 punkty – gdy:

- poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że cena piłki, którą postanowili kupić chłopcy wynosi 300 zł **lub**
- poda odpowiedź, że cena piłki, którą postanowili kupić chłopcy wynosi 300 zł i sprawdzi, że podane cena **spełnia wszystkie** warunki zadania.

1 punkt – gdy:

- poprawnie ułoży równanie np. $0{,}4x + 20 + 0{,}2x + 40 + 60 = x$ i na tam zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, że 40% ceny piłki jest równe 120 zł i na tam zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- obliczy, że np. 10% ceny piłki jest równe 30 zł lub 20% ceny piłki jest równe 60 zł lub 1% ceny piłki jest równe 3 zł i na tam zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- poda odpowiedź, że cena piłki, którą postanowili kupić chłopcy wynosi 300 zł i **nie sprawdzi**, że podane cena **spełnia wszystkie** warunki zadania.

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Uwaga:
Nie odejmujemy punktów jeśli uczestnik nie zapisze słownie odpowiedzi, że cena piłki wynosi 300 zł. Wystarczy, że rozwiązując odpowiednie równanie otrzyma cenę piłki równą 300 zł.

Zadanie 21.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Prostopadłościenny zamknięty karton o pojemności $1{,}8\ litra$ jest częściowo wypełniony sokiem. Gdy stoi na ścianie o najmniejszym polu, poziom soku sięga do wysokości $1{,}5\ cm$, gdy na średniej ścianie – sok osiąga poziom $1{,}2\ cm$, gdy zaś na największej – sok sięga do wysokości $1\ cm$. Jaka jest objętość soku w kartonie? Zapisz obliczenia i podaj odpowiedź.

Przykładowe rozwiązania:

Metoda I

Dany jest prostopadłościan o wymiarach $a\ cm, b\ cm, c\ cm$, gdzie a, b, c są liczbami dodatnimi

$V = 1{,}8\ l = 1800\ cm^3$

$V = a \cdot b \cdot c\ [cm^3]$ – objętość prostopadłościanu

$Zatem\ a \cdot b \cdot c\ = 1800$

Przez $V_{soku} = a \cdot b \cdot 1{,}5\ [cm^3] =\ b \cdot c \cdot 1{,}2\ [cm^3] = a \cdot c \cdot 1\ [cm^3]$

Zatem:

$a \cdot b \cdot 1{,}5\ =\ a \cdot c$ i $b \cdot c \cdot 1{,}2\ = a \cdot c$, czyli

$c = 1{,}5b$ i $a = 1{,}2b$ Zatem

$a \cdot b \cdot c\ = 1800$

$1,2b \cdot b \cdot 1{,}5b\ = 1800$

$1,8b^3 = 1800$

$b^3 = 1000$

$b\ = 10\ cm$

$a\ = 1{,}2b = 12\ cm$

$c\ = 1{,}5b = 15\ cm$

$V_{soku} = a\ cm \cdot b\ cm \cdot 1{,}5\ cm = 12\ cm \cdot 10\ cm \cdot 1{,}5\ cm =\ 180\ cm^3 = 0{,}18\ l$

Objętość soku w kartonie wynosi 180 cm^3.

Metoda II

Dany jest prostopadłościan o wymiarach $a\ cm, b\ cm, c\ cm$, gdzie a, b, c są liczbami dodatnimi

$V = 1{,}8\ l = 1800\ cm^3$

$V = a \cdot b \cdot c\ [cm^3]$ – objętość prostopadłościanu

$Zatem\ a \cdot b \cdot c\ = 1800$

Przez $V_{soku} = a \cdot b \cdot 1{,}5\ [cm^3] =\ b \cdot c \cdot 1{,}2\ [cm^3] = a \cdot c \cdot 1\ [cm^3]$

Zatem $V_{soku}^3 =\ a \cdot b \cdot 1{,}5\ \cdot b \cdot c \cdot 1{,}2\ \cdot a \cdot c \cdot 1$

$V_{soku}^3 = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot 1{,}8$

$V_{soku}^3 = (a \cdot b \cdot c)^2 \cdot 1{,}8$

$V_{soku}^3 = (1800)^2 \cdot 1{,}8$

$V_{soku}^3 = (18)^2 \cdot 100^2 \cdot 1{,}8$

$V_{soku}^3 = (18)^2 \cdot 10^4 \cdot 1{,}8$

$V_{soku}^3 = (18)^2 \cdot 10^3 \cdot 18$

$V_{soku}^3 = (18)^3 \cdot 10^3$

$V_{soku}^3 = (180)^3$

$V_{soku} = 180\ [cm^3] = 0{,}18\ l$

Objętość soku w kartonie wynosi $180\ cm^3$.

Uczestnik otrzymuje:

3 punkty – gdy:

- poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że objętość soku w kartonie wynosi $180\ cm^3$.

2 punkty – gdy:

- poprawnie wyznaczy (obliczy) wymiary jednej krawędzi prostopadłościanu np.: $a\ = 12\ cm\ lub\ b\ = 10\ cm\ lub\ c\ = 15\ cm$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- ułoży poprawne równanie z jedną niewiadomą np.:

$$1{,}8b^3 = 1800 \qquad \textbf{lub} \qquad \frac{120}{225}c^3 = 1800 \qquad \textbf{lub} \qquad \frac{150}{144}c^3 = 1800$$

  i wyznaczy z błędem rachunkowym wartość a lub b lub c, która jest liczbą dodatnią i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca bezbłędnie **lub**
- ułoży poprawne równanie z jedną niewiadomą V_{soku} np.: $V_{soku}^3 = (1800)^2 \cdot 1{,}8$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

1 punkt – gdy:

- zapisze, że $V_{soku} = a \cdot b \cdot 1{,}5\ [cm^3]$ i $V_{soku} =\ b \cdot c \cdot 1{,}2\ [cm^3]\ i\ V_{soku} = a \cdot c \cdot 1\ [cm^3]$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, że $a \cdot b \cdot 1{,}5 = b \cdot c \cdot 1{,}2\ = a \cdot c$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze dwa równania, np.:
  $a \cdot b \cdot 1{,}5 = b \cdot c \cdot 1{,}2\ \ i\ b \cdot c \cdot 1{,}2\ = a \cdot c$ lub

  $a \cdot b \cdot 1{,}5 = b \cdot c \cdot 1{,}2\ \ i\ a \cdot b \cdot 1{,}5 = a \cdot c$ lub

  $a \cdot b \cdot 1{,}5 = a \cdot c\ i\ b \cdot c \cdot 1{,}2\ = a \cdot c$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Uwagi:

1. **Nie odejmujemy punktów jeśli uczestnik zapisując równania w rozwiązaniu zadania pominie zapisanie założeń np., że a, b, c są liczbami dodatnimi.**
2. **Jeśli uczestnik zapisując objętość prostopadłościanu zapisze $V = 180$, (pominie jednostki) to maksymalnie za zadanie może otrzymać 2 punkty.**

Zadanie 22.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **2**

Dana jest liczba $a = \sqrt{333^2 + 444^2}$ wykaż, że liczba a jest liczbą całkowitą podzielną przez pięć. Zapisz rozwiązanie i podaj uzasadnienie.

<u>Przykładowe rozwiązanie:</u>

Dana jest liczba $a = \sqrt{333^2 + 444^2}$*, należy wykazać,* że liczba a jest liczbą całkowitą podzielną przez pięć zatem zauważmy, że 333 i 444 jest wielokrotnością liczby 111.

$$a = \sqrt{333^2 + 444^2} = \sqrt{(3 \cdot 111)^2 + (4 \cdot 111)^2} = \sqrt{3^2 \cdot (111)^2 + 4^2 \cdot (111)^2} =$$
$$\sqrt{111^2 \cdot (3^2 + 4^2)} = \sqrt{111^2 \cdot (9 + 16)} = \sqrt{111^2 \cdot 25} = 111 \cdot 5 = 555$$

Zatem liczba a jest liczbą całkowitą podzielną przez pięć.

Zasady oceniania: Uczestnik otrzymuje:

2 punkty – gdy:

- poprawnie uzasadni, że liczba a jest liczbą całkowitą podzielną przez pięć **lub**
- obliczy $a = \sqrt{333^2 + 444^2} = \sqrt{308025} = 555$ i zapisze, że 555 jest liczbą podzielną przez pięć bądź podzieli liczbę 555 i otrzyma w wyniku dzielenia liczbę 111.

1 punkt – gdy:

- zapisze liczbę a w postaci np.:

$$\sqrt{3^2 \cdot (111)^2 + 4^2 \cdot (111)^2}\ lub\ \sqrt{111^2 \cdot (3^2 + 4^2)}\ \ lub\ \sqrt{111^2 \cdot (9 + 16)}\ lub\ \sqrt{111^2 \cdot 25}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**

- zapisze liczbę w postaci $a = \sqrt{308025} = \sqrt{111^2 \cdot 25^2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze liczbę w postaci $a = \sqrt{308025}$ i rozłoży liczbę 308025 na czynniki pierwsze i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeśli uczestnik zapisze tylko, że liczba $a = \sqrt{308025}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy np. w obliczaniu pierwiastka lub rozkładzie liczby 308025 na czynniki pierwsze to otrzymuje **0 punktów.**

Zadanie 23.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **3**

Iloczyn dwóch liczb dwucyfrowych dodatnich jest równy 825. Wyznacz te liczby, jeśli po zaokrągleniu do pełnych dziesiątek iloczyn tych zaokrągleń wynosi 800. Zapisz obliczenia i podaj odpowiedź.

<u>Przykładowe rozwiązanie:</u>

Iloczyn dwóch liczb dwucyfrowych dodatnich jest równy 825, zatem rozkładając na czynniki pierwsze liczbę 825 otrzymujemy:

$825 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$, czyli

$825 = 15 \cdot 55 \; lub \; 825 = 25 \cdot 33 \; lub \; 825 = 11 \cdot 75$ z warunku zadania, że iloczyn zaokrągleń do pełnych dziesiątek szukanych liczb dwucyfrowych ma wynosić 800 wystarczy sprawdzić, która para spełnia drugi warunek zadania.

<u>Przypadek I</u>

$825 = 15 \cdot 55,\ 15 \approx 20 \; i \; 55 \approx 60 \; czyli \; 20 \cdot 60 = 1200 \neq 800$

<u>Przypadek II</u>

$825 = 25 \cdot 33,\ 25 \approx 30 \; i \; 33 \approx 30 \; czyli \; 30 \cdot 30 = 900 \neq 800$

<u>Przypadek II</u>

$825 = 11 \cdot 75 \; 11 \approx 10 \; i \; 75 \approx 80 \; czyli \; 10 \cdot 80 = 800$

Szukane liczby to 11 i 75.

Uczestnik otrzymuje:

3 punkty – gdy:

- poprawnie rozwiąże zadanie i wyznaczy, że szukane liczby to 11 i 75 **lub**
- poda odpowiedź, że szukane liczby to 11 i 75 i sprawdzi, że podane liczby **<u>spełniają wszystkie</u>** warunki zadania.

2 punkty – gdy:

- **zapisze trzy pary** liczb całkowitych dodatnich dwucyfrowych, których iloczyn jest równy 825 $825 = 15 \cdot 55 \; \boldsymbol{i} \; 825 = 25 \cdot 33 \; \boldsymbol{i} \; 825 = 11 \cdot 75$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**

1 punkt – gdy:

- rozłoży liczbę 825 na czynniki pierwsze $825 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- przedstawi liczbę 825 w postaci iloczynu np. $825 = 15 \cdot 55 \; lub \; 825 = 25 \cdot 33 \; lub \; 825 = 11 \cdot 75$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**

- poda odpowiedź, że szukane liczby to 11 i 75 i **nie sprawdzi**, że podane liczby **spełniają wszystkie** warunki zadania.

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.

Zadanie 24.	Liczba uzyskanych punktów: ___/ **2**

Pan Andrzej bardzo lubi ubrania w kratkę, każdego dnia ubierając się wybiera ze swojej szafy koszulę oraz marynarkę. Pan Andrzej posiada 10 różnych koszul, wśród których 3 są w kratkę i 7 różnych marynarek, wśród których dokładnie 2 są w kratkę. Pan Andrzej każdego dnia wybiera marynarkę lub koszulę w kratkę, ale nigdy nie założy jednocześnie koszuli w kratkę i marynarki w kratkę. Czy pan Andrzej w miesiącu styczniu może każdego dnia wybrać inny zestaw koszuli i marynarki, który na siebie założy? Zapisz obliczenia i podaj uzasadnienie swojej odpowiedzi.

Przykładowe rozwiązanie:

10 – liczba różnych koszul

3 – liczba koszul w kratkę

7 – liczba koszul nie w kratkę

7 – liczba różnych marynarek

2 – liczba marynarek w kratkę

5 – liczba marynarek nie w kratkę

Pan Andrzej zgodnie ze swoimi upodobaniami wybierze koszulę w kratkę i marynarkę nie w kratkę lub koszulę nie w kratkę i marynarkę w kratkę.

Liczba takich zestawów wynosi: $3 \cdot 5 + 7 \cdot 2 = 15 + 14 = 29$

Zatem liczba różnych zestawów ubrań pana Andrzeja wynosi: $29, a\ 29 < 31\ zatem$:

Pan Andrzej nie może każdego dnia w ciągu stycznia założyć innego zestawu koszuli i marynarki, tak aby dokładnie jedno z ubrań było w kratkę, ponieważ liczba dni w miesiącu styczniu wynosi 31, a zestawów jest 29.

Zasady oceniania: Uczestnik otrzymuje:

2 punkty – gdy:

- poprawnie uzasadni, że pan Andrzej w stycznie nie może założyć innego zestaw ubrań każdego dnia **lub**
- obliczy liczbę zestawów ubrań równą 29 i zapisze że liczba dni w styczniu jest większa niż 29.

1 punkt – gdy:

- obliczy liczbę zestawów ubrań równą 29 i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**

- zapisze, że liczba zestawów ubrań jest równa $3 \cdot 5 + 7 \cdot 2$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy **lub**
- zapisze, że są dwa przypadki wyboru koszuli i marynarki:
  koszula w kratkę i marynarka nie w kratkę lub koszula nie w kratkę i marynarka w kratkę i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

0 punktów – rozwiązanie błędne, brak rozwiązania.